Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

2. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 22.10.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4+4 Punkte) Für $p \in [1,\infty]$ sei $V_p \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$V_p := \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} \leq 1 \right\}, & \text{für} \quad p \in [1,\infty), \\ \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\|_\infty := \max\{|x_i| \ : \ i = 1,2\} \leq 1 \right\}, & \text{für} \quad p = \infty. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ für $p = 1, 2, \infty$ und für ein weiteres $p \in (1,\infty)$.

b) Skizzieren Sie den Bereich aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die das Proximum eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)

a) Wiederholen Sie die Höldersche, die Cauchy-Schwarz'sche und die Minkowskische Ungleichung. Untersuchen Sie in jedem Fall, wann die Gleichheit angenommen wird. Geben Sie an, welche Literaturstellen Sie für die Bearbeitung dieser Aufgabe benutzt haben.

b)Geben Sie an, welche der Einheitskugeln, die in Aufgabe 1 auftreten, strikt konvex sind und welche nicht (mit Begründung).

c) Beweisen Sie, dass die L^p-Normen für $1 < p < \infty$ strikt konvex sind und für $p \in \{1,\infty\}$ nicht.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Finden Sie einen Teilraum M von $C[a,b]$ und eine Funktion $f \in C[a,b]$, die kein Proximum in M besitzt.