Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

3. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 29.10.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)

a) Sei ein inneres Produkt auf $C[-\pi,\pi]$ durch

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

definiert und $\delta_{n,m}$ das Kronecker-Symbol. Zeigen Sie, dass für die Funktionen $\cos nx$, $\sin mx$, $n, m \in \mathbb{N}$, gilt

$$\begin{aligned}
< \sin nx, \cos mx > &= 0, \\
< \cos nx, \cos mx > &= \begin{cases} 1 & , \quad n = m = 0, \\ \dfrac{\delta_{n,m}}{2} & , \quad \text{sonst}, \end{cases} \\
< \sin nx, \sin mx > &= \frac{\delta_{n,m}}{2}.
\end{aligned}$$

b) Durch eine Transformation erhält man aus der Identitäten in a) eine ONB für $C[-1,1]$. Setzen Sie die Funktion $f(x) := x$, $-1 < x < 1$, $2-$periodisch fort und entwickeln Sie die fortgesetzte Funktion in eine Fourier-Reihe. Bestimmen Sie den Wert der Fourier-Reihe für $-1 < x < 1$.

Aufgabe 2 (4+4+4+4 Punkte)

Sei E ein linearer Raum über $\mathbb{R}^n$ mit innerem Produkt $< \cdot, \cdot >$ und Norm $\| \cdot \| := \sqrt{< \cdot, \cdot >}$.

a) Wann steht in der Dreiecksungleichung das Gleichheitszeichen?

b) Zeigen Sie, dass $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ für $x, y \in E$ und $< x, y >= 0$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in E$ gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

d) Sei $E = \mathbb{R}^2$ und $< \cdot, \cdot >$ das übliche Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$. Interpretieren Sie a)-c) geometrisch.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + x^3 + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6}$, $-1 \le x \le 1$ und $\epsilon = 0.05$. **Hinweise:** Benutzen Sie die Aufgabe 3 auf dem Blatt 1.

a) Berechnen Sie die Näherung $L(x)$ nach Lanczos für f, so dass $|f(x) - L(x)| < \epsilon$.

b) Berechnen Sie den Fehler in der Norm, die durch das innere Produkt

$$< f, g > := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

gegeben wird.

c) Skizzieren Sie den Fehler.