Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

4. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 12.11.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Mit den Bezeichnungen der Vorlesung seien

$$\begin{aligned} K &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \le 1\}, \\ V &:= \left\{ \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=0}^{k} a_{kj} \cdot x^{k-j} y^j \;:\; a_{kj} \in \mathbb{R} \right\}, \\ f(x,y) &:= x^4 + 2x^2y^2 + y^4, \quad (x,y) \in K. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $p_a(x,y) := x^2+y^2-a$ für $a = \frac{1}{8}$ ein Proximum an f ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Seien $C[-1,1]$ der Raum alle stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ mit der Maximumnorm und $\mathcal{P}_n$ der Raum alle Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich n, $n \in \mathbb{N}$. Seien $f \in C[-1,1]$ gerade und $p^* \in \mathcal{P}_n$ ein Proximum an f. Zeigen Sie, dass auch $\tilde{p}(x) := \frac{1}{2}p^*(x) + \frac{1}{2}p^*(-x)$ ein Proximum an f ist. Was ist wenn f ungerade ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die trigonometrische Funktionen

$$\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ein Haarsches System auf $[0, 2\pi]$ bilden. **Tipp:** Benutzen Sie die Euler-deMoivre Formeln

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin nx &= \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}). \end{aligned}$$