Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

5. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 19.11.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $V \subset C[a,b]$ linear. Sei $L : V \to \mathbb{R}$ linear mit $|||L||| \leq 1$, $L(q) = 0$ für alle $q \in V$. Zeigen Sie, dass

$$E_V(f) \geq |L(f)| \quad \text{für alle } f \in C[a,b].$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$L(q) := \frac{1}{8}q(-1) - \frac{1}{4}q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}q(0) - \frac{1}{4}q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{8}q(1) = 0$$

für alle $q \in \mathcal{P}_3$.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte) Seien $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}T_k(x)$, $p_3(x) := \sum_{k=0}^{3} 2^{-k}T_k(x)$, $x \in [-1,1]$, und p^* die beste Approximation an f in $\mathcal{P}_3$.

a) Schätzen Sie $\|f - p^*\|$ nach oben und nach unten ab unter Verwendung von p_3 und dem Satz von de la Vallée-Poussin.

b) Schätzen Sie $\|f - p^*\|$ mit Hilfe von Aufgabe 1 und dem Funktional aus aufgabe 2 nach unten ab.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Formulieren Sie den Alternantensatz (Satz 5 aus der Vorlesung) für $C(S^1)$, wobei

$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}.$$