Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

6. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 26.11.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $0 < \omega_p < \omega_s < \pi$. Beim Design von s.g. Tiefpassfiltern wird das Proximum $p^* \in \mathcal{P}_n$ zur stückweise konstanten Funktionen

$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi, \end{cases}$$

gesucht. Das Proximum wird Tschebyscheff-Filter genannt (oder Equiripple–Approximation).

a) Zeigen Sie, dass die maximal mögliche Länge einer Alternante $n+3$ ist.

b) Diskutieren Sie die möglichen Fälle, die als Alternante auftreten können. Veranschaulichen Sie diese.

c) Beweisen Sie, dass ω_p, ω_s jeder Alternante angehören, die die Länge größer oder gleich $n+2$ hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Bestimmen Sie das Proximum $p^* \in \mathcal{P}_1$ für $f(x) := \sqrt{1+x}$ auf $[-1,1]$ in dem Sie mit der Referenz $\{-1,0,1\}$ starten. Berechnen Sie das diskrete Proximum p_d und einen Punkt, der beim 1. Schritt in die Referenz aufzunehmen ist.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte) Sei $V := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, e^x\}$. Berechnen Sie mit Hilfssatz 1 das diskrete Proximum $p^* \in V$ an $f(t) = t$ bzgl.

$$\|g\|_T := \max\{|g(-1)|, |g(0)|, |g(1)|\}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die beste Approximation in $\mathcal{P}_n$ an

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_{3^k}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

unter den Voraussetzungen $b_k > 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ stets die Partialsumme bis $k = m$ mit $3^m \leq n < 3^{m+1}$ ist. Außerdem, zeigen Sie, dass

$$E_{\mathcal{P}_n}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad 3^k > n.$$