Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

8. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 10.12.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4+4 Punkte) Seien $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$, $f \in C[a,b]$,

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \prod_{k=1}^{n}(x-x_k), \quad \ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \\ A_k(x) &= \left(1 - \frac{\omega''(x_k)(x-x_k)}{\omega'(x_k)}\right)\ell_k^2(x), \\ B_k(x) &= (x-x_k)\ell_k^2(x). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$, $p = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k + \sum_{k=1}^{n} f'(x_k)B_k$ erfüllt

$$p(x_k) = f(x_k), \quad p'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Zeigen Sie, dass das Polynom p in a) eideutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte) Beweisen Sie den Satz von Mamedov: Seien $\{L_n\}$, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$, eine Folge positiver linearer Operatoren, $f \in C^2[a,b]$ und $\{\alpha_n\}$ eine Folge reeller Zahlen, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.
Für die drei Monome e_0, e_1, e_2 aus $C[a,b]$ und $x_0 \in [a,b]$ gelte

1) $L_n e_0(x_0) = 1 + o(\alpha_n)$,
2) $L_n e_i(x_0) = x_0^i + \alpha_n \psi_i(x_0) + o(\alpha_n), \quad i = 1, 2,$
3) $\exists\, m \in \mathbb{N}$, so dass $L_n(e_1 - x_0 e_0)^{2m+2}(x_0) = o(\alpha_n)$ für $n \to \infty$,

so folgt

$$L_n f(x_0) - f(x_0) = \frac{\alpha_n}{2}\Big(2\psi_1(x_0)f'(x_0) + [\psi_2(x_0) - 2x_0\psi_1(x_0)]f''(x_0)\Big) + o(\alpha_n)$$

für alle Funktionen $f \in C^2[a,b]$ und $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei eine monotone Nullfolge $\{\varepsilon_n\}$, also $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \ldots$, gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $f \in C[-1,1]$,

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) T_{3^k},$$

definiert ist und $E_{\mathcal{P}_n}(f) \geq \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Voronovskaya, dass

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(x^3;x) - x^3] = 3x^2(1-x).$$