Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

9. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 17.12.04, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4 Punkte) Dirichlet– und Fejer–Kerne sind definiert durch

$$D_n(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{\sin\frac{1}{2}t} \quad \text{und} \quad K_n(t) := \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}t}{\sin^2 \frac{1}{2}t},$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1.$$

Skizzieren Sie D_4 und K_4.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ zwei Folgen mit

$$a_n := \sum_{k=0}^{n-1} q^k, \quad |q| \leq 1, \quad \text{und} \quad s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie den Verhalten für $n \to \infty$ der beiden Folgen für alle $|q| \leq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Die Fourier–Transformierte einer Funktion $f \in C_{2\pi}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}f(\omega) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-iwt}dt.$$

Die Faltung zweier derartigen Funktionen f, g ist gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)du.$$

Zeigen Sie, dass $f * g = g * f$ und $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ gelten.