Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

10. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 7.01.05, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4 Punkte) Weisen Sie die Eigenschaften ii)–iv) des Stetigkeitsmoduls aus der Vorlesung nach.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f \in C_{2\pi}$, $f(x) = |x|$. Bestimmen Sie $\sigma_n(f)$ und $\phi_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und I kompakt. Zeigen Sie, dass falls f' fast überall existiert und

$$\int_I (f'(t))^2 dt < \infty,$$

dann gilt $\int_I f'(t)dt$ existiert und $f \in \text{Lip}\frac{1}{2}$.
(**Hinweis:** Schätzen Sie mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz das Integral $\int_I f'(t)dt$ ab. Berechnen Sie $\left|\int_t^{t+h} f'(\tau)d\tau\right|^2$.)

Aufgabe 4 (4 Punkte) Der Jackson-Kern ist definiert durch

$$J_n(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{2n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 .$$

Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 = n + 2\left[(n-1)\cos t + (n-2)\cos 2t + \ldots + \cos{(n-1)t}\right]$$

und

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n-2} \rho_{2n-2,k} \cos kt, \quad \rho_{2n-2,1} := 1 - \frac{3}{2n^2}.$$