Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

12. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 21.01.05, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Hölder-Ungleichungen

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{für alle} \quad f \in L_p(\mathbb{R}), \quad g \in L_q(\mathbb{R}),$$

$$\|c \cdot d\|_1 \leq \|c\|_p \|d\|_q \quad \text{für alle} \quad c \in \ell_p(\mathbb{Z}), \quad d \in \ell_q(\mathbb{Z}).$$

b) Geben Sie für $1 < p < \infty$ Beispiele für Funktionen an, die zu $L_p(\mathbb{R})$ aber nicht zu $L_1(\mathbb{R})$ bzw. zu $L_1(\mathbb{R})$ aber nicht zu $L_p(\mathbb{R})$ gehören.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die kardinale B-Splines $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, als Träger $[0, k+1]$ haben, und dass sie $(k-1)-$mal stetig differenzierbar und stückweise Polynome vom Grad kleiner oder gleich k auf jedem Intervall der Form $(j, j+1)$, $j \in \mathbb{Z}$, sind.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für

$$\mathcal{N}_k|_{(j,j+1)}(x) := \begin{cases} \mathcal{N}_k(x) & , \quad j < x < j+1, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad k, j \in \mathbb{N}_0$$

gilt

$$\mathcal{N}_k|_{(j,j+1)}(x) = \int_{x-1}^{j} \mathcal{N}_{k-1}|_{(j-1,j)}(u)du + \int_{j}^{x} \mathcal{N}_{k-1}|_{(j,j+1)}(u)du.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz 1 (aus der Vorlesung) für $p = \infty$.