Prof. Dr. M. Möller

Lehrstuhl VIII
Universität Dortmund

13. Blatt Approximationstheorie
WS 2004/05 (Möller/Charina-Kehrein)

Abgabetermin ist Freitag, 28.01.05, 12.00. Aufgabenkasten Nr. 116.

Internetseite:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/approx04/`

Aufgabe 1 (4+4+4 Punkte) Die zentrierten B-Splines M_j, $j \in \mathbb{N}_0$, sind definiert als

$$M_j := \underbrace{\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} * \cdots * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}_{j+1} .$$

a) Zeigen Sie, dass M_j, $j \in \mathbb{N}_0$, gerade sind und, dass $\hat{M}_j(\xi) = \left(\frac{\sin \xi/2}{\xi/2}\right)^{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

b) Überprüfen Sie die Strang-Fix-Bedingungen für M_j, $j \in \mathbb{N}_0$.

c) Zeigen Sie, dass $M_j = N_j(\cdot + \frac{j+1}{2})$, $j \in \mathbb{N}_0$, und

$$M_{j+1}(x) = \frac{x + j/2 + 1}{j+1} M_j(x + \frac{1}{2}) + \frac{1 + j/2 - x}{j+1} M_j(x - \frac{1}{2}).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(x + 2k\pi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{-i\nu x}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $\phi := \chi_{[0,1)} - \chi_{[0,1)}(\cdot + 1)$. Berechnen Sie $\hat{\phi}$. Überprüfen Sie, welche der Strang-Fix-Bedingungen erfüllt sind.

b) Sei $\psi_j := N_{j-1} * \phi$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\psi_0 = \phi$. Welche der Strang-Fix-Bedingungen sind für ψ_j, $j \in \mathbb{N}_0$, erfüllt?

c) Zeigen Sie, dass es kein $c \in \ell(\mathbb{Z})$ gibt, so dass $x^{j+1} = (\psi_j * c)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.