2.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Aufgabe 1:
Sei $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ eine Kurve. Man zeige:
α ist eine Frenet-Kurve genau dann, wenn $\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Aufgabe 2:
Sei $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ eine Frenet-Kurve, und sei $(e_1, e_2, e_3) = (T, N, B)$ das Frenet-Dreibein von α, und (κ, τ) die Frenet-Krümmungen.
Zeigen Sie:

$$T = \frac{\dot\alpha}{\nu} \qquad \kappa = \frac{\|\dot\alpha \times \ddot\alpha\|}{\nu^3}$$

$$N = B \times T \qquad \tau = \frac{\det(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{\|\dot\alpha \times \ddot\alpha\|^2}$$

$$B = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{\|\dot\alpha \times \ddot\alpha\|}$$

wobei $\nu := \|\dot\alpha\|$.

Hinweis: Verwenden Sie die Frenetschen Gleichungen.

Aufgabe 3:
Sei $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = (a\,cos\,t, \quad a\,sin\,t,\; bt), \quad \text{wobei} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad b \in \mathbf{R} \quad \text{konstant sind.}$$

α heißt **Helix**, a bzw. b heißen **Radius** bzw. **Steigung** der Helix.

a) Skizzieren Sie die Helix.

b) Berechnen Sie das Frenet-Dreibein (T, N, B) und die Krümmung κ sowie die Torsion τ.

c) Zeigen Sie: Jede Kurve im $\mathbf{R}^3$ mit konstanter Krümmung und Torsion ist - bis auf Euklidische Bewegungen - in einer Helix enthalten.