3. Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Aufgabe 1:
Seien $r, h : I \to \mathbf{R}$ zwei glatte Funktionen, $r > 0$.
Zeigen Sie: Die Menge

$$S := \{(r(t)\cos\theta,\ r(t)\sin\theta,\ h(t)) \,\big|\, t \in I,\ \theta \in [0, 2\pi]\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

ist eine Fläche.

Bemerkung: Diese Fläche heißt **Rotationsfläche** der Kurve $(r(t), h(t))$.

Aufgabe 2:
Eine Fläche $S \subseteq \mathbf{R}^3$ heißt **Regelfläche**, falls es durch jeden Punkt $p \in S$ eine Gerade gibt, die in S enthalten ist.
a) Zeigen Sie:

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

ist eine Regelfläche und eine Rotationsfläche.

Aufgabe 3:
Sei $\alpha(t) := (a\cos t, a\sin t, bt)$ eine Helix, wobei $a > 0$ und $b \in \mathbf{R}$ konstant sind. Sei $S := \bigcup_{t\in\mathbf{R}} g_t$, wobei g_t die Gerade durch $\alpha(t)$ ist, die die z-Achse senkrecht schneidet.
Zeigen Sie: $S \subseteq \mathbf{R}^3$ ist eine Regelfläche.

Bemerkung: Diese Fläche heißt **Helikoid**.