

5. Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Aufgabe 1:

Sei $\alpha(t) := (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ die **Traktrix** (vgl. 1. Übungsblatt). Berechne die Gaußkrümmung der zugehörigen Rotationsfläche.

Aufgabe 2:

Sei $p \in S$ und $N : S \rightarrow S^2$ die Gaußabbildung. Zeige:

$$|K(p)| = \lim_{B \rightarrow \{p\}} \frac{A(dN(B))}{A(B)},$$

wobei A für den Flächeninhalt steht. Der Grenzwert ist so zu verstehen, dass man eine Folge von kompakten Mengen $p \in B_n \subseteq S$ betrachtet, so dass $A(B_n) > 0$ und jede offene Umgebung von p alle B_n für hinreichend großes n enthält.

Hinweis: Man zeige zunächst:

$$dN(x_u) \times dN(x_v) = K x_u \times x_v$$

Aufgabe 3:

Berechne die Krümmungslinien und Asymptotenlinien des Hyperboloids

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Aufgabe 4:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende Fläche, für die jeder Punkt ein Nabelpunkt ist. Zeige: S ist in einer Sphäre oder in einer Ebene enthalten.