6. Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Es sollen alle Rotationsflächen mit konstanter Gaußkrümmung beschrieben werden. Hierzu sei $\alpha(t) = (r(t), h(t))\,, \quad r(t) > 0$ die Profilkurve.

Aufgabe 1:
Zeige: Ist α nach der Bogenlänge parametrisiert, so sind die Prinzipalkrümmungen gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{\ddot{r}}{\dot{h}} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{\dot{h}}{r}$$

Aufgabe 2:
Nimm an, dass die Gaußkrümmung $K \equiv c^2 > 0$ ist.
Zeige: Es gibt eine Konstante $k > 0$, so dass - bis auf Umparametrisierung - die Profilkurve durch

$$\alpha(t) = \left(\frac{k}{c}\cos c\,t,\ \pm\int\sqrt{1-k^2\sin^2 c\,t}\,d\,t\right)$$

gegeben ist. Wie sieht die zugehörige Kurve aus für
a) $0 < k < 1$
b) $k = 1$
c) $k > 1$?

Aufgabe 3:
Nimm an, dass die Gaußkrümmung $K \equiv -c^2 < 0$ ist.
Zeige: Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass - bis auf Umparametrisierung - die Profilkurve durch

$$\alpha(t) = \left(c_1 \cosh\, c\,t + c_2 \sinh\, c\,t,\ \pm\int\sqrt{1-(cc_1\sinh\, c\,t + cc_2\cosh\, c\,t)^2}\right)$$

gegeben ist. Wie sieht die zugehörige Kurve aus für

a) $c_1 < c_2$, b) $c_1 > c_2$, c) $c_1 = c_2$?

Aufgabe 4:
Nimm an, dass die Gaußkrümmung $K \equiv 0$ ist.
Zeige: Es gibt Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}, \quad c_1^2 + c_2^2 = 1$, so dass - bis auf Umparametrisierung - die Profilkurve durch

$$\alpha(t) = (c_1\,t + c_3,\ c_2\,t + c_4)$$

gegeben ist.

Welches sind die entsprechenden Rotationsflächen?
(Unterscheide die Fälle $c_1c_2 \neq 0, \quad c_1 = 0,\ c_2 = 0$)