10. Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Es sei $\mathbb{CP}^n := \{1-$dimensionale komplexe Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}\}$. Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{CP}^n$ eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

1. Zeige: Für $i = 1, ..., n+1$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{CP}^n \\ (z_1, ..., z_n) &\longmapsto \mathbb{C}(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_i, ..., z_n) \end{aligned}$$

injektiv, und $x_1(\mathbb{C}^n) \cup x_2(\mathbb{C}^n) \cup ... \cup x_{n+1}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^n$.

2. Berechne die Koordinatenübergänge

$$x_i^{-1} \circ x_j : x_j^{-1}(x_i(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

und zeige, dass sie differenzierbar sind.

3. Zeige: $\mathbb{CP}^1 = S^2$, und die Koordinatenabbildungen

$$x_1 : \mathbb{C} \to S^2,\ x_2 : \mathbb{C} \to S^2$$

entsprechen der „stereographischen Projektion“.