11. Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Sei $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ die Einheitssphäre, versehen mit der kanonischen Riemannschen Metrik.

Aufgabe 1:
Zeige: Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ ist $m_\lambda : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$

$$z \longmapsto \lambda z$$

wohldefiniert und eine Isometrie.

Aufgabe 2:
Sei $f : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$

$$z \longmapsto span(z) =: [z]$$

Zeige: a) f ist differenzierbar
b) f ist surjektiv
c) für alle $z \in S^{2n+1}$ gilt: $df_z : T_z\, S^{2n+1} \longrightarrow T_{[z]}\mathbb{CP}^n$ ist surjektiv.

(Bemerkung: eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, die a), b) und c) erfüllt, heißt **Submersion**.)

Aufgabe 3:
Für $z \in S^{2n+1}$ definiere $\mathcal{H}_z := (\ker df_z)^\perp \subset T_z S^{2n+1}$. Zeige: $(df_z)|_{\mathcal{H}_z} : \mathcal{H}_z \longrightarrow T_{[z]}\mathbb{CP}^n$ ist ein Vektorraumisomorphismus, und es gibt genau ein inneres Produkt g_z auf $T_{[z]}\mathbb{CP}^n$, so dass $(df_z)|_{\mathcal{H}_z}$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 4:
Zeige: Falls $f(z) = f(z')$, dann ist $g_z = g_{z'}$, d.h. das innere Produkt g_z auf $T_{[z]}\mathbb{CP}^n$ ist wohldefiniert, unabhängig von der Wahl von $z' \in f^{-1}([z])$.