UNIVERSITÄT DORTMUND ◇ FACHBEREICH MATHEMATIK
LEHRSTUHL FUNKTIONENTHEORIE ◇ PROF. DR. NORBERT STEINMETZ

1. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

6. Oktober 2004

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 1 Die Funktion $u(z) = \arg(z-1)$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$ mit stetigen Randwerten ausser in $\zeta = 1$. Berechnen Sie $\lim\limits_{r\to 0} u(1-re^{i\alpha})$ (Annäherung an 1 auf einem Strahl, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$).

Aufgabe 2 *(fortgesetzt)* Ist $h : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\, P(e^{i\theta}, z)\, d\theta$ harmonisch in $\mathbb{D}$, stetig in $\overline{\mathbb{D}}$ mit Randwerten h. Was passiert, wenn h eine Sprungstelle hat, z.B. $h(e^{i0+}) = a \neq b = h(e^{i2\pi-})$? Kann man auch hier $\lim\limits_{r\to 0} u(1-re^{i\alpha})$ berechnen?

Aufgabe 3 *(Regulär subharmonische Funktionen)*
Zeigen Sie: Ist $v \in \mathcal{C}^2(D)$ und $\Delta v > 0$ in D, so hat v in D kein lokales Maximum, somit genügt v dem Maximumprinzip. Was ergibt sich, wenn dies auf $v-u$ im Gebiet Ω angewendet wird; dabei ist $\overline{\Omega} \subset D$, u stetig in $\overline{\Omega}$ und harmonisch in Ω.

Aufgabe 4 Es sei $v \in \mathcal{C}^2(D)$, $m < v(z) < M$ in D, $h \in \mathcal{C}^2(m, M)$ und $u(z) = h(v(z))$. Berechnen Sie Δu in Termen von h und v. Zeigen Sie: $\Delta v = 0$ und $h' \geq 0$ bzw. $\Delta v \geq 0$ und $h' \geq 0$, $h'' \geq 0$ garantieren $\Delta u \geq 0$.

Aufgabe 5 *([sub]harmonisch von holomorph)* Es sei V [sub]harmonisch in G und $f : D \to G$ holomorph. Zeigen Sie, dass $v(z) = V(f(z))$ in D [sub]harmonisch ist. Es gibt mindestens zwei Beweismöglichkeiten im harmonischen Fall: (i) Δv wird explizit berechnet oder (ii) V wird lokal zu einer holomorphen Funktion $V + i\tilde{V}$ ergänzt. Gilt dann im subharmonischen Fall für $v = V \circ f$ das Maximumprinzip?

Aufgabe 6 *(Satz von Liouville, verallgemeinertes Maximumprinzip)*
Zeigen Sie, dass jede in $D = \mathbb{C}$ nach oben beschränkte subharmonische Funktion v und jede in $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ einseitig beschränkte harmonische Funktion u konstant ist. Betrachten Sie dazu v bzw. u in $D_{z_0} = D \setminus \{z_0\}$. Was ist als Ausnahme-Rand von D_{z_0} anzusehen?

Aufgabe 7 *(Polarkoordinaten)* Es sei u harmonisch im Kreisring $r_1 < |z| < r_2$, $\bar{u}(r,\theta) = u(re^{i\theta})$ und $m(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$, $r_1 < r < r_2$. Zeigen Sie

$$\Delta u = \bar{u}_{rr} + \frac{1}{r}\bar{u}_r + \frac{1}{r^2}\bar{u}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(r\bar{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\bar{u}_{\theta\theta}$$

und $m(r) = a\log r + b$; berechnen Sie dazu $\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}\, m(r))$.

Aufgabe 8 Sei $K \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und konvex, D eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ und $v(z) = \operatorname{dist}(z, K) = \min\{|z-\zeta| : \zeta \in K\}$ in D. Ziel ist zu zeigen, dass v subharmonisch in D ist. Der einfachste Fall ist der einer Geraden K; dann ist v sogar harmonisch in jeder der beiden Halbebenen, die $\mathbb{C} \setminus K$ ausmachen. Was haben Halbebenen mit konvexen Mengen und Lotfußpunkten zu tun?

Alle Informationen unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/fth0405.html