Universität Dortmund ◇ Fachbereich Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie ◇ Prof. Dr. Norbert Steinmetz

2. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

21. Oktober 2004

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 9 Es sei $D = (0,1) \times (0,1)$ und u die Lösung des Dirichletproblems $\Delta u = 0$ in D, $u(x,0) = x^2$, $u(0,y) = y$, $u(1,y) = 1+y$ und $u(x,1) = 1+x$. Zeigen Sie $x^2 + y < u(x,y) < x + y$; suchen Sie bessere (Polynom-) Schranken, z.B. $x^2(1+y) + (1-x)y$. Schätzen Sie $|u(x,y) - y - \frac{1}{2}x(1-y) - \frac{1}{2}x^2(1+y)|$ möglichst gut ab.

Aufgabe 10 *(Regularität)* Es sei D ein Gebiet. Behauptung: $0 \in \partial D$ ist regulärer Randpunkt, wenn eine der folgenden Voraussetzungen vorliegt (Beweis *ohne* das Hauptkriterium zu benutzen):

(i) Ein Strahl von 0 nach ∞ trifft D nicht.

(ii) Eine Strecke von 0 nach b trifft D nicht.

(iii) Ein Jordanbogen γ von 0 nach b trifft D nicht. Hinweis: Es soll $v(z) = \operatorname{Re}(1/\log z)$ in $\{z : |z| < \delta\} \setminus \gamma$ untersucht werden. Funktioniert das?

Aufgabe 11 Es sei D ein reguläres Gebiet, $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{H}$ bezeichnen die Räume der auf ∂D stetigen bzw. auf $\overline{D}$ stetigen und in D harmonischen Funktionen, beide Räume versehen mit der Maximumnorm. Welche Verbindungen gibt es zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{H}$?

Aufgabe 12 Es sei $\mathbb{H}$ die rechte Halbebene, $[ia, ib]$ eine Strecke auf $i\mathbb{R}$ und $\theta = \theta(z)$ der Winkel, unter dem man die Strecke vom Punkt $z \in \mathbb{H}$ aus sieht. Zeigen Sie, dass θ harmonisch ist und berechnen Sie die Randwerte, wo es geht. Berechnen Sie das Maximum von $\theta(z)$ bei festem $\operatorname{Re} z = x_0 > 0$.

Aufgabe 13 Es sei $D \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{D}$ eine Riemannabbildung mit $f(z_0) = 0$; dann ist $g(z, z_0, D) = -\log|f(z)|$ die Greensche Funktion von D mit Pol in z_0. Kann man dieses Argument umdrehen, d.h., den Riemannschen Abbildungssatz über die Existenz von $g(z, z_0, D)$ beweisen?

Aufgabe 14 Bestimmen Sie die Greensche Funktion $g(z, \zeta, \mathbb{D}^+)$ des oberen Halbkreises $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und daraus den Poissonkern von $\mathbb{D}^+$.

Aufgabe 15 Eine reguläre Ausschöpfung eines Gebietes D ist eine Gebietsfolge (D_n) mit den Eigenschaften (i) D_n ist regulär, (ii) $D_n \subset D_{n+1}$ (iii) $\overline{D}_n \subset D$ und (iv) $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Zeigen Sie, dass eine reguläre Ausschöpfung (D_n) immer existiert.

Aufgabe 16 *(fortgesetzt)* Zeigen Sie $g(z, z_0, D_n) \leq g(z, z_0, D_{n+1})$ in D_n. Wie könnte man $g(z, z_0, D)$ aus den Greenschen Funktionen $g(z, z_0, D_n)$ gewinnen bzw. die Existenz beweisen?