3. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

16. November 2004

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 17 Es sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Beweisen Sie die Ungleichung von BERNSTEIN $M(r) \leq M(1)r^n$ für $r > 1$. Hinweis: 3-Kreise-Satz für P, Radien $1 < r < R$ (sehr gross).

Aufgabe 18 Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$, alle $a_k \neq 0$, $n \geq 1$, und $\lambda_k \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht existiert. Hinweis: Indirekter Beweis. Nehmen Sie zunächst $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ sowie $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ an. Kann man den allgemeinen Fall darauf reduzieren?

Aufgabe 19 Sei f holomorph im Streifen $S = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ mit Randwerten $\limsup_{z\to\zeta} |f(z)| \leq 1$ für $\operatorname{Im}\zeta = 0$ und $\operatorname{Im}\zeta = 1$. Zeigen Sie, dass entweder $|f(z)| \leq 1$ in S oder aber $\sup\{|f(x+iy)| : 0 < y < 1\} \geq e^{ce^x}$ für ein $c > 0$ und $x \geq x_0$ gilt. Hinweis: betrachten Sie $f(\frac{1}{\pi}\log w)$ in $\operatorname{Re} w > 0$.

Aufgabe 20 Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ in $\mathbb{D}$. Zeigen Sie: (i) $z = 1$ ist eine singuläre Stelle von f; (ii) $f(z) = z + f(z^2)$ und: $z = -1$ ist eine singuläre Stelle von f; (iii) Alle Stellen $z = e^{2k\pi i/2^n}$ sind singulär für f; (iv) alle z mit $|z| = 1$ sind singulär für f;