Universität Dortmund ◇ Fachbereich Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie ◇ Prof. Dr. Norbert Steinmetz

4. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

24. November 2004

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 21 *Analytische Fortsetzung*
Es sei (f, Δ) ein Funktionselement, $D \supset \Delta$ ein Gebiet und (f', Δ) in D unbeschränkt analytisch fortsetzbar. Zeigen Sie, dass dann auch (f, Δ) in D unbeschränkt fortsetzbar ist. Was ergibt sich für $f(z) = \arcsin z$ in $\Delta = \mathbb{D}$, was für $f(z) = \arctan z$? Bestimmen Sie das maximale D. Wie unterscheiden sich Fortsetzungen von f längs verschiedener Wege (beginnend in 0) mit gleichem Endpunkt?

Aufgabe 22 *Homotopie*
Alle Wege $\alpha, \beta, \ldots : [0,1] \to D$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sind geschlossen und beginnen und enden in $z_0 \in D$. Die Verkettung und ebenso die Orientierungsumkehr werden ausnahmsweise multiplikativ geschrieben:

$$(\beta\alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad (\alpha^{-1})(t) = \alpha(1-t).$$

$\alpha \sim \alpha_1$ bedeutet *homotop,* und ι ist der Punktweg $\iota(t) = z_0$. Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 23 (*fortgesetzt*)
Zeigen Sie $\alpha \sim \alpha_1$ und $\beta \sim \beta_1$ impliziert $\beta\alpha \sim \beta_1\alpha_1$, $\alpha^{-1} \sim \alpha_1^{-1}$ und $\alpha\alpha^{-1} \sim \iota$. Hinweis zu $\beta\alpha$: Versuchen Sie es mit $H(t,s) = \begin{cases} H_\alpha(2t, s) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H_\beta(2t-1, s) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$, wobei H_α die Kurve α in α_1 und H_β die Kurve β in β_1 deformiert.

Aufgabe 24 *Die Fundamentalgruppe*
Es bezeichnet $[\alpha]$ die Homotopieklasse von α und G_{z_0} die Menge der Homotopieklassen. Zeigen Sie, dass G_{z_0} mit der vertreterunabhängigen (das wurde in A. 23 bewiesen) Multiplikation $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$, der Inversenbildung $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ und der *Eins* $\mathbf{1} = [\iota]$ eine Gruppe bildet. Zeigen Sie, dass die Gruppen G_{z_0} und $G_{z_0'}$ *isomorph* sind, $G_{z_0} \simeq G_{z_0'}$. Jede abstrakte Gruppe $\pi_1(D) \simeq G_{z_0}$ heisst *Fundamentalgruppe* von D. Bestimmen Sie $\pi_1(D)$ für $D = \mathbb{D}$ und für $D = \{z : r < |z| < 1\}$.