UNIVERSITÄT DORTMUND ◇ FACHBEREICH MATHEMATIK
LEHRSTUHL FUNKTIONENTHEORIE ◇ PROF. DR. NORBERT STEINMETZ

5. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

1. Dezember 2004

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 25 *Die Jacobischen Thetafunktionen* sind durch die Reihen

$$\vartheta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, q^{n^2} \, e^{2\pi i n z}$$

$$\vartheta_1(z) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \, e^{(2n+1)\pi i z}$$

$$\vartheta_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \, e^{(2n+1)\pi i z}$$

$$\vartheta_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \, e^{2n\pi i z}$$

definiert, wobei $q = e^{\pi i \tau}$ und $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau : \operatorname{Im} \tau > 0\}$ ist. Zeigen Sie:

a) Die Reihen konvergieren absolut und lokal gleichmässig in $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$
b) ϑ_0 ist 1-periodisch und τ-*quasiperiodisch*, d.h. $\vartheta_0(z+\tau) = -\frac{1}{q} \, e^{-2\pi i z} \, \vartheta_0(z)$
c) ϑ_0 ist gerade und $\tau/2$ ist eine Nullstelle von ϑ_0
d) ϑ_0 hat genau die Nullstellen $n + \left(m + \frac{1}{2}\right)\tau$, $n, m \in \mathbb{Z}$. *Hinweis*: Argumentprinzip in einem geeigneten Parallelogramm; beachten Sie (b).
g) $s(z) = \vartheta_0(z)/\vartheta_1(z)$ elliptisch mit primitiven Perioden 2 und τ

und füllen Sie folgende Tabellen mit Leben:

	$\vartheta_j(z+\frac{1}{2})$	$\vartheta_j(z+\frac{\tau}{2})$	$\vartheta_j(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})$
$j=0$	$\vartheta_3(z)$	$i\,q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\vartheta_1(z)$	$q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\,\vartheta_2(z)$
$j=1$	$\vartheta_2(z)$	$i\,q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\vartheta_0(z)$	$q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\,\vartheta_3(z)$
$j=2$	$-\vartheta_1(z)$	$q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\vartheta_3(z)$	$-i\,q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\,\vartheta_0(z)$
$j=3$	$\vartheta_0(z)$	$q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\vartheta_2(z)$	$i\,q^{-1/4}\,e^{-\pi i z}\,\vartheta_1(z)$

	Nullstellen	$\vartheta_j(z+1)$	$\vartheta_j(z+\tau)$	$\vartheta(-z)$
ϑ_0	$n+(m+\frac{1}{2})\tau$	$\vartheta_0(z)$	$-q^{-1}e^{-2\pi i z}\vartheta_0(z)$	$\vartheta_0(z)$
ϑ_1	$n+m\tau$	$-\vartheta_1(z)$	$-q^{-1}e^{-2\pi i z}\vartheta_1(z)$	$-\vartheta_1(z)$
ϑ_2	$n+\frac{1}{2}+m\tau$	$-\vartheta_2(z)$	$q^{-1}e^{-2\pi i z}\vartheta_2(z)$	$-\vartheta_2(z)$
ϑ_3	$n+\frac{1}{2}+(m+\frac{1}{2})\tau$	$\vartheta_3(z)$	$q^{-1}e^{-2\pi i z}\vartheta_3(z)$	$\vartheta_3(z)$