Universität Dortmund ◇ Fachbereich Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie ◇ Prof. Dr. Norbert Steinmetz

7. Aufgabenblatt – Funktionentheorie II – WS 2004/05

18. Januar 2005

Die Aufgaben sind bewusst nicht mit Kochrezepten zu lösen. Die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert, sondern in den Übungen erarbeitet – nach vorheriger intensiver Beschäftigung mit den Aufgaben. Der Übergang zwischen Vorlesung und Übung wird fliessend sein.

Aufgabe 32 Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}\setminus[a,b]$, $-1<a<b<1$, mittels eine Möbiustransformation T auf $\mathbb{D}\setminus[-r,r]$ abgebildet werden kann. Dabei ist $r>0$ eindeutig bestimmt und zu berechnen.

Aufgabe 33 Es sei $\mathfrak{R}$ das Innere einer Ellipse mit Brennpunkten -1 und 1 ohne das Intervall $[-1,1]$. Bestimmen Sie eine konforme Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf einen Kreisring.

Aufgabe 34 Es sei $\mathfrak{R}$ ein nicht ausgeartetes Ringgebiet. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ gibt, die $\mathfrak{R}$ in zwei im folgenden Sinn *gleichgrosse* Ringgebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zerlegt: $\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{C}=\mathfrak{R}_1\cup\mathfrak{R}_2$ und $\operatorname{mod}\mathfrak{R}_1=\operatorname{mod}\mathfrak{R}_2$; $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ liegen spiegelsymmetrisch zu $\mathfrak{C}$. Bestimmen Sie $\mathfrak{C}$ für $\mathfrak{R}=\mathbb{C}\setminus([0,\rho]\cup[r,\infty))$.

Aufgabe 35 Es seien G und D konform äquivalente Gebiete beliebiger Zusammenhangszahl. Wie hängen die Automorphismengruppen $\operatorname{Aut}(D)$ und $\operatorname{Aut}(G)$ zusammen?

Aufgabe 36 Zeigen Sie, dass ein n-fach zusammenhängendes Gebiet D, $3\le n<\infty$, nur endlich viele konforme Automorphismen zulässt. Geben Sie Beispiele mit (möglichst) kleiner/grosser Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(D)$ an. Hinweis: Kreisringschlitzgebiet.

Aufgabe 37 (Verallgemeinerung) Es seien D und G Gebiete, die Zusammenhangszahl von G sei n, $3\le n<\infty$. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele eigentliche Abbildungen $D\to G$ gibt. Hinweis auch hier: Kreisringschlitzgebiete.

Aufgabe 38 Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ Ringgebiete und $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}_1$ eigentlich vom Grad d. Zeigen Sie $\operatorname{mod}\mathfrak{R}_1=d\operatorname{mod}\mathfrak{R}$. Warum hat f keine kritischen Punkte?

Aufgabe 39 Es sei $\mathfrak{R}$ der Kreisring $r<|z|<1/r$. Nach einem früheren Beispiel gibt es eine in $\mathfrak{R}$ holomorphe Funktion Φ_a, $a\in\mathfrak{R}$, so dass

$$g(z,a,\mathfrak{R})=\frac{\log|a|\,r}{2\log r}\log\frac{|z|}{r}-\log|\Phi(z)|$$

die Greensche Funktion von $\mathfrak{R}$ mit Pol in a ist. Bestimmen Sie mittels (diverser) Funktionen Φ_a die eigentlichen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf $\mathbb{D}$ vom Grad $d=2$ und $d=3$.

Aufgabe 40 Es sei f_α die durch die Normierung $f_\alpha(z)=\frac{1}{z-\zeta}+a_1(z-\zeta)+\cdots$ bei $z=\zeta$ eindeutig bestimmte konforme Abbildung des n-fach zusammenhängenden Gebietes D auf ein Parallelschlitzgebiet mit Neigungswinkel α. Zeigen Sie

$$f_\alpha(z)=e^{i\alpha}\big[f_0(z)\cos\alpha-if_{\pi/2}\sin\alpha\big].$$

Alle Informationen unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/fth0405.html