Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 26.10.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Sei $M \neq \emptyset$. Ein System $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$ nicht leerer Teilmengen M_i von M heißt eine *Partition* von M, wenn gilt:

(1) $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$

(2) $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle i, j mit $i \neq j$.

Zeigen Sie:

a) Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation in M bilden eine Partition von M.

b) Ist $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$ eine Partition von M, so wird durch

$$xRy :\Leftrightarrow x \in M_i \text{ und } y \in M_i \text{ für ein } i \in I,$$

$(x, y \in M)$ eine Äquivalenzrelation in M definiert.

Aufgabe 2:
Sei M eine endliche Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:
2^n ist die Anzahl aller Abbildungen von M in $\{0, 1\}$.
Folgern Sie daraus:

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^n.$$

Aufgabe 3:
Sei M eine endliche Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen von M auf M.

b) Für $1 \leq k \leq n$ sei $S(n, k)$ die Anzahl der Partitionen einer n -Menge in genau k nicht-leere Teilmengen. Sei N eine endliche Menge mit k $(1 \leq k \leq n)$ Elementen.
Zeigen Sie: Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N ist $k! \cdot S(n, k)$.
Hinweis:
Sei $f : M \to N$ surjektiv. Betrachten Sie die von f induzierte Äquivalenzrelation in M.

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie, ob folgende Zahlen rational sind:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{6}$$