Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 02.11.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 3

Aufgabe 1:
Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ und $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ gegeben durch ihre eindeutige Primfaktorzerlegung (einige der α_i, β_i können 0 sein). Das *kleinste gemeinsame Vielfache* wird definiert durch

$$\text{kgV}\,(a,b) := p_1^{\gamma_1} \cdots p_n^{\gamma_n} \text{ mit } \gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

$$a \cdot b = \text{ggT}\,(a,b) \cdot \text{kgV}\,(a,b).$$

Aufgabe 2:
Sei $\text{ggT}\,(a,b) = 1$ und $d \in \mathbb{N}$ und sei x_1, y_1 eine spezielle Lösung der Gleichung $ax + by = d$.
Zeigen Sie, dass für jede Lösung x, y dieser Gleichung ein $t \in \mathbb{Z}$ existiert mit $x = x_1 + t \cdot b$ und $y = y_1 - t \cdot a$.
Hinweis: Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Arithmetik.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen m und n den größten gemeinsamen Teiler d, und stellen Sie diesen als $\mathbb{Z}$ -Linearkombination $d = xm + yn$ von m und n dar:

a) $m = 163163$, $n = 329423$.

b) $m = 100000001$, $n = 123456789$

Aufgabe 4:

a) Es sei
$$G = \{r + s\sqrt{3} \mid r, s \in \mathbb{Q},\ r^2 + s^2 \neq 0\}.$$
Zeigen Sie, dass G bezüglich der üblichen Multiplikation eine Gruppe ist.

b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ definiert man auf G eine weitere innere Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ durch
$$a \circ b := a \cdot x \cdot b.$$
Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

Klausurtermin: Samstag, 05.Februar 2005, $13^{\underline{00}} - 16^{\underline{00}}$ Uhr
Nachklausurtermin: Samstag, 02.April 2005, $9^{\underline{00}} - 12^{\underline{00}}$ Uhr