Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 09.11.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

1) In einem Monoid $(M, \circ)$ mit neutralem Element e gelte $x \circ x = e$ für alle Elemente $x \in M$. Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ kommutativ ist.

2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gruppentafeln alle Gruppen mit vier Elementen ($G = \{e, a, b, c\}$, e bezeichne das neutrale Element von G). Welche davon sind abelsch?

Aufgabe 2:
Seien G eine Gruppe und die $H_i,\ i \in I$ eine Menge von Untergruppen von G.
Zeigen Sie:

1) $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ ist eine Untergruppe von G.

2) Gilt für beliebige $H_j, H_k,\ j, k \in I$ stets $H_j \subset H_k$ oder $H_k \subset H_j$, so ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G.

Wir betrachten nun die Menge aller derjenigen Untergruppen $H_i,\ i \in \hat{I}$ von G ($\hat{I}$ Indexmenge), die ein vorgegebenes Element a enthalten. Zeigen Sie:

3) Es gilt: $\bigcap\limits_{i \in \hat{I}} H_i = \{x \in G \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = a^k\}$.
Bezeichnungen: $\bigcap\limits_{i \in \hat{I}} H_i$ (mit dem soeben angegebenen $\hat{I}$) heißt die von a erzeugte Untergruppe von G.

Sei im Folgenden a ein Element der Ordnung n. Zeigen Sie:

4) n ist die kleinste positive ganze Zahl, für die $a^n = e$ wird (e sei das neutrale Element in G).

5) Dann und nur dann gilt $a^k = e$, wenn k ein ganzzahliges Vielfaches von n ist.

Aufgabe 3:
Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung der Menge M in die Menge N. Man zeige, dass für beliebige Teilmengen $A, B \subset M$ gelten:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Zeigen Sie außerdem:

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \text{ Für alle } A, B \text{ mit } A \subset M \text{ und } B \subset M \text{ gilt} : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$