Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 16.11.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

1) Berechnen Sie in der $\mathcal{S}_5$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1202}$$
(sowohl in der Permutation- als auch in der Zyklenschreibweise)

2) Berechnen Sie in der $\mathcal{S}_6$ (auch in Zyklenschreibweise) die folgenden Produkte und bestimmen Sie deren Inverse.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie:
Die Drehungen, die ein gegebenes reguläres n–Eck in sich überführen, bilden eine Gruppe. Sie ist isomorph zu $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.
(regulär bedeutet, dass alle Kanten zueinander äquivalent sind und alle Ecken zueinander äquivalent sind)

b) Beweisen Sie:
Die A_3 ist isomorph zur Gruppe der Drehungen, die ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen.
(A_3 ist die *alternierende Gruppe* vom Grad 3)

Aufgabe 3:
Sei $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ definiert durch $f(x) = 2^x$.

1) Zeigen Sie, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist.

2) Bestimmen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f := \operatorname{Bild} f$.

Aufgabe 4:
Sei G eine Gruppe. Dann heißt
$$Z(G) := \{x \in G \mid \forall a \in G: \ ax = xa\}$$
das Zentrum von G. Zeigen Sie:

a) $Z(G)$ ist eine Untergruppe von G

b) G ist genau dann abelsch, wenn $G = Z(G)$.

c) Ist $G/_{Z(G)}$ zyklisch, so ist G abelsch.

d) Die Ordnung von $G/_{Z(G)}$ ist nie eine Primzahl.

e) Bestimmen Sie $Z(\mathcal{S}_3)$.

Hinweis: unter http://mentor.mathematik.uni-dortmund.de findet ihr ein Forum/Matheportal, wo über Vorlesungen und Übungen diskutiert werden kann.