

## Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I Übungsblatt 6

### Aufgabe 1:

- a) Sei  $M = \langle a, b \rangle$  ein Monoid mit neutralem Element  $e$ .  
Es gelte:  $a^4 = e$ ,  $b^2 = e$ ,  $ba = a^3b$ .  
Zeigen Sie:  
 $M$  ist eine Gruppe mit  $|M| = 1, 2, 4$  oder  $8$ .
- b) Sei  $G = \langle a, b \rangle$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ .  
Es gelte:  $a^{-1}bab^{-2} = b^{-1}aba^{-2} = e$ .  
Zeigen Sie:  
Es ist  $G = \{e\}$ , d.h.  $G$  ist die triviale Gruppe.

### Aufgabe 2:

- a) Sei  $R$  ein Integritätsbereich mit Einselement. Besitzt  $R$  nur endlich viele Elemente, so ist  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  eine Gruppe.
- b) Bestimmen Sie alle Integritätsbereiche mit  $p$  Elementen,  $p$  Primzahl.  
Zeigen Sie zunächst (mit dem Satz von Lagrange):  
Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung  $p$ ,  $p$  Primzahl.

### Aufgabe 3:

Erinnerung:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , wird vermöge der Verknüpfung

$$(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) := ab + n\mathbb{Z}$$

zu einem Monoid  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$  mit neutralem Element  $1 + n\mathbb{Z}$ .

Zeigen Sie:

Für  $|n| \geq 2$  ist  $\text{Inv}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* := \{a + n\mathbb{Z} \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}$  bzgl. der Multiplikation eine Gruppe (die der primen Restklassen modulo  $n$ ).

Berechnen Sie die Ordnung der Gruppe  $(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}, \cdot)^*$

Lösen Sie die Gleichung  $(x + 36\mathbb{Z}) \cdot (11 + 36\mathbb{Z}) = 2 + 36\mathbb{Z}$  in  $(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}, \cdot)$

### Aufgabe 4: „Sternchen-Aufgabe“

Ein russisches Erdölfeld ist 144 km breit. Das Explorationsteam einer deutschen Ölfirma weiß aus theoretischen Modellen, dass die Dicke vom Rand bis zur dicksten Stelle streng monoton zunimmt und dann wieder streng monoton abnimmt. Es soll die dickste Stelle mit möglichst wenigen Bohrungen bis auf 1 km genau finden. Wie ist dabei vorzugehen?

Hinweise:

- a)  $89 + 55 = 144$   
b) S.  $\sqrt{2^{16}}$

**Hinweis:** Die Übungszettel gibt es ab jetzt nur noch online unter

[http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~rosenber/LinA\\_I](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~rosenber/LinA_I). Wer zu Hause keinen Internetanschluß besitzt, kann im CIP-Pool Mathematik (M R 944) seine Übungszettel ausdrucken (Papier ist dabei selbst mitzubringen).