Prof. Dr. G. Rosenberger | Abgabe: Di, 30.11.2004, 16h
V. große Rebel

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ das Polynom $t^3+t^2+at+b \in \mathbb{Z}[t]$ durch das Polynom t^2+3t+1 teilbar ist, d.h. für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ es ein $q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ gibt mit $t^3+t^2+at+b = q(t)(t^2+3t+1)$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},\ a \mapsto a + n\mathbb{Z}$ einen Ringhomomorphismus definiert. Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv? Was ist der Kern von φ?

b) Für welche Zahlen $m \in \mathbb{N}$ gibt es einen von der Nullabbildung verschiedenen Ringhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$?

Aufgabe 3:
Seien R, S zwei kommutative Ringe mit Einselement, und sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass $\ker f = \{a \in R \mid f(a) = e_S\}$ ein Ideal in R ist.

b) Beweisen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\ker f = \{e_R\}$ gilt.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie:

a) Sei R ein Ring und $\{I_j\}_{j\in J},\ J \neq \emptyset$ Indexmenge, ein System von Idealen, es gelte weiter, dass für beliebige Ideale $I_k, I_l \in \{I_j\}_{j\in J}$ stets $I_k \subset I_l$ oder $I_l \subset I_k$, so ist $\bigcup\limits_{j\in J} I_j$ ein Ideal in R.

b) Sind I_1 und I_2 Ideale im Ring R, so ist auch ihre Summe

$$I_1 + I_2 := \{a + b \mid a \in I_1,\ b \in I_2\}$$

ein Ideal.

Aufgabe 5:
Zeigen Sie durch Rechnen in $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, dass für jede Primzahl p folgende Aussagen gelten:

a) (Kleiner Satz von Fermat) $x^p \equiv x (\text{mod } p)$

b) (Satz von Wilson) $(p-1)! \equiv -1 (\text{mod } p)$