Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 07.12.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d(t)$ von

$$\begin{aligned} & f(t) = t^4 + t^3 - t^2 + t + 2 \\ \text{und} \quad & g(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 1 \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}[t]$ und schreiben Sie ihn in der Form

$$d(t) = \lambda(t)f(t) + \mu(t)g(t).$$

Aufgabe 2:
Seien R_1 und R_2 Ringe, $R_1 \times R_2 := \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$.
Weisen Sie nach, dass $R_1 \times R_2$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) + (s_1, s_2) &:= (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \\ (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) &:= (r_1 s_1, r_2 s_2) \text{ mit } r_1, s_1 \in R_1,\ r_2, s_2 \in R_2 \end{aligned}$$

ein Ring ist.
Seien R_1 und R_2 zusätzlich Körper. Besitzt $R_1 \times R_2$ Nullteiler? Ist $R_1 \times R_2$ ein Körper?

Aufgabe 3:
Sei $A \subset \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Untersuchen Sie, ob $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{lin} A$ und ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{lin} A$.

Aufgabe 4:
Sind folgende Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort. Skizzieren Sie zunächst die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (4x_2, x_1 - x_2, 0)\}$

b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = -x_2\}$

c) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

d) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = (x_1, 1)\}$