Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 14.12.2004, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 9

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$,

b) $(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)$,

c) $(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)$,

d) $(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)$

Aufgabe 2:
Es sei V ein K–Vektorraum. Weiter seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie:

a) Für $a_1, \ldots, a_n \in K^* := K \setminus \{0\}$ ist $a_1\vec{v}_1, \ldots, a_n\vec{v}_n$ wieder linear unabhängig.

b) Für $\vec{w} := b_1\vec{v}_1 + \ldots + b_i\vec{v}_i + \ldots + b_n\vec{v}_n,\ b_1, \ldots, b_n \in K,\ b_i \neq 0$ ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n$ wieder linear unabhängig.

c) $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i \rangle \cap \langle \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n \rangle = \{\vec{0}\}$

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie:
Zwei Vektoren (a, b) und (c, d) des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $ad = bc$ ist.

b) Es seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die paarweise linear unabhängig sind. Folgt daraus, dass $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear unabhängig voneinander sind? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4:

a) Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren $\vec{v}_1 = (2, 4), \vec{v}_2 = (-2, 1), \vec{v}_3 = (1, -5)$ gegeben. Welche Figur erhält man, wenn man (ausgehend vom Nullpunkt) alle Vektoren der Form $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + r_3\vec{v}_3$ mit $0 \leq r_i \leq 1$ (i=1,2,3) abträgt?

b) Im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ seien vier Punkte A, B, C und D mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bzw. $\vec{d}$, von denen je drei linear unabhängig sind, gegeben. Der Streckenzug $ABCDA$ stellt ein (im allgemeinen nichtebenes) Viereck dar.
Zeigen Sie:
Das Viereck, dessen Ecken die Seitenmitten des gegebenes Vierecks $ABCD$ sind, ist ein Parallelogramm.