Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 04.01.2005, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 10

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y, 0)$,

b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z - 1, x - z)$,

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x^2 + y, x)$,

d) $f_4 : (\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^2 \to (\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^2$
$(x, y) \mapsto (x^2 + y, x)$.

Aufgabe 2:
Die Menge $\mathbb{C}^n$ kann sowohl als Vektorraum über $\mathbb{C}$ als auch über $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden. Zeigen Sie:

a) Eine über $\mathbb{C}$ linear unabhängige Familie in $\mathbb{C}^n$ ist auch über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

b) Die Elemente $(1 - i, i), (2, -1 + i) \in \mathbb{C}^2$ sind linear abhängig über $\mathbb{C}$, aber linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

c) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3:
Die Teilmenge M des K–Vektorraumes V erzeugt einen Unterraum U von V. Bestimmen Sie eine Teilmenge von M, die Basis von U ist.

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(1, -1, 2), (4, 3, 1), (5, 2, 3)\}$,

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$, $M = \{(0, 0, 0, 0), (2, 3, -2, 5), (1, 0, -1, 1)\}$,

c) $K = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$, $V = K^3$, $M = \{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2})\}$.

Aufgabe 4:
Geben Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis an:

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$,

b) $\text{lin}\,\{t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5\} \subset \mathbb{R}[t]$,

c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Aufgabe 5:
Es seien K ein Körper, V, W zwei K–Vektorräume, $n \in \mathbb{N}$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ sind linear unabhängig,

b) $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \in W$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 6:
Es seien V ein n–dimensionaler K–Vektorraum, $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume mit $U_1 \oplus U_2 = V$. Weiter sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von U_1 und $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ eine Basis von U_2. Zeigen Sie:

a) $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ ist eine Basis von V

b) $U_2 \cong V/U_1$

Aufgabe 7:
Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y + z, 2x + z, y - x)$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x - 2y + z, 0, 2y - z - x).$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\ker f$ und Bild f sowie auch von $\ker g$ und Bild g.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!