Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 11.01.2005, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:
Seien V, W endlich dimensionale K–Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Beweisen Sie die Dimensionsformel

$$\dim_K (\text{Bild } f) + \dim_K (\ker f) = \dim_K (V)$$

für lineare Abbildungen direkt, d. h. ohne Verwendung des Homomorphiesatzes.
(Hinweis: Wählen Sie eine Basis von Bild f sowie zu jedem Basisvektor ein festes Urbild und betrachten Sie den von diesen Urbildern aufgespannten Untervektorraum von V.)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

c) Berechnen Sie außerdem $A^{100}, B^{100}, C^{100}$ für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis zur Berechnung von C^{100}: Für Matrizen A, B mit $A \cdot B = B \cdot A$ gilt der Binomische Lehrsatz.

Aufgabe 4:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ existiert $B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_2$?

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (1,0,0) & \mapsto & (3,7) \\ (0,1,0) & \mapsto & (-1,4) \\ (0,0,1) & \mapsto & (2,-2) \end{cases}$$

in den Basen $\{(1,2,1), (-1,3,2), (0,4,3)\}$ und $\{(1,3), (1,2)\}$.

Hinweis: Die Anmeldung zur Klausur findet nächste Woche (10.01. – 14.01.05) in den Übungen statt.