Prof. Dr. G. Rosenberger Abgabe: Di, 18.01.2005, 16h
V. große Rebel

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

a) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i \geq j$, also $A := \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass A^n die Nullmatrix ist.

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ invertierbar sind, und bestimmen Sie ggf. das Inverse.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung mit

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ an, so dass $f \circ g$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

b) Geben Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $h : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ an, so dass $h \circ f$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

Aufgabe 3:
Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_3).$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A_f von f bezüglich der Basen $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ und $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$, wobei

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{b}_2 = (2, 1, 3),\ \vec{b}_3 = (0, 1, 2)$$

$$\vec{c}_1 = (1, 0, 1),\ \vec{c}_2 = (1, 1, 1),\ \vec{c}_3 = (0, 1, 1).$$

Aufgabe 4:
Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?