Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Di, 25.01.2005, 16h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie I
Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie Basen $\underline{\mathrm{B}}_v$ des $\mathbb{R}^3$, $\underline{\mathrm{B}}_w$ des $\mathbb{R}^3$, so dass $M_{\underline{\mathrm{B}}_v}^{\underline{\mathrm{B}}_w}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Außerdem sind reguläre Matrizen S, T mit

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & -2 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & & & = & -4 \\ -4x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

b) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\det B = \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$

c) $\det C = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & x & a \\ a & \cdots & a & a & x \end{vmatrix}$

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper, $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie per Induktion über n:

$$V(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$