Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

2. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 26.10.2004 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Zeige: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, so ist C der Durchschnitt aller Halbräume, die C enthalten.

Hinweis: Mache dir zunächst klar, dass jeder Halbraum konvex ist. Konstruiere dann für $x \notin C$ einen Halbraum, der C aber nicht x enthält. Dazu sei $y \in C$ mit $\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \mid z \in C\}$ (wieso existiert dieses Minimum?); dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm. Betrachte die durch $a = x - y$ und $\alpha = a^T y$ definierte Hyperebene.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$.

a) Bestimme und zeichne für $S = \{(1,1), (1,-1)\} \subseteq \mathbb{K}^2$ die Mengen $\text{lin}(S)$, $\text{cone}(S)$, $\text{aff}(S)$ und $\text{conv}(S)$. Was ändert sich, wenn wir zu S den Nullpunkt $(0,0)$ hinzufügen?

b) Zeige , daß die lineare (konische, affine, konvexe) Hülle von S der kleinste lineare Raum (Kegel, affine Raum, konvexe Menge) ist, der S enthält.

c) Bestimme die Dimension der Mengen $S = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ und $T = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid x + y = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$.

d) Zeige : Die affine und die lineare Hülle von S sind genau dann gleich, wenn der Nullpunkt in $\text{aff}(S)$ enthalten ist.

e) Zeige: Für jedes beliebige x aus der affinen Hülle von S gilt $\text{aff}(S) = x + \text{lin}(S - x)$.

f) Zeige: Die konische und die lineare Hülle von S sind genau dann gleich, wenn für jedes beliebige $x \in S$ gilt: $-x \in \text{cone}(S \setminus \{x\})$.

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 Punkte)
Ein Düngemittelhersteller baut drei Rohstoffe 1,2 und 3 ab, aus denen er zwei Sorten von Dünger produziert: ein Dünger hat einen hohen Phosphatanteil (`H`), der andere einen niedrigen (`L`). Tabelle 1 gibt einen Überblick über die zur Produktion einer Einheit von `H` und `L` benötigten Mengen an Rohstoffen, die pro Monat verfügbaren Mengen an den drei Rohstoffen und den Gewinn, der durch den Verkauf einer Einheit von Dünger `H` und `L` erzielt wird.

a) Formuliere das Problem des Düngemittelherstellers, den Gewinn aus der Düngerproduktion zu maximieren, als lineares Programm.

	Rohstoffbedarf/t Dünger		maximal verfügbare Menge
Rohstoff	H	L	Rohstoffe/t/Monat
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Gewinn/t	15	10	max

Tabelle 1: Düngemittelproduktion.

b) Bestimme das zu obigem Programm duale lineare Programm.

c) Interpretiere das duale Programm ökonomisch als ein Problem der Kostenmiminierung eines Waschmittelherstellers, der den Düngemittelhersteller dazu bewegen will, seine Rohstoffe an ihn zur Produktion von Waschmittel zu verkaufen.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Wende die Fourier-Motzkin-Elimination an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &\le 1 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\le 0 \\
-3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\le 2 \\
-x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 &\le -3 \\
3x_2 + x_3 + x_4 &\le 2
\end{aligned}$$

D. h. führe das Projektions-Verfahren sukzessive für das obige System mit den Richtungsvektoren e_1, e_2, e_3 und e_4 durch.

Programmieraufgabe 1

Programmiere das Verfahren von Fourier-Motzkin zur Elimination von Variablen in einem Ungleichungssystem der Form $Ax \le b$. Das Programm soll sukzessive eine durch eine Liste gegebene Teilmenge der Variablen eliminieren und die hierbei entstehenden Ungleichungssysteme ausgeben. Versuche, diese Systeme zu reduzieren (Entfernung doppelter oder offensichtlich redundanter Ungleichungen). Das Programm soll gut dokumentiert sein.

Führe das Verfahren für die Beispiele aus, die auf unserer WWW–Seite zu finden sind.

Die Abnahme der Programmieraufgabe erfolgt in den betreuten Rechnerzeiten am 2. und 4. November 2004. Bei der Abnahme sollte jeder, der einen Schein bekommen möchte, anwesend sein und sowohl den Ablauf des Programmes als auch den Quellcode erklären können.