Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

3. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 2.11.2004 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 9 (3 + 4 + 6 Punkte)

Betrachte das folgende „Fahrrad-Problem“: n Personen wollen von Ort A nach Ort B gelangen, die Distanz beträgt 20km. Dabei steht ihnen ein Fahrrad zur Verfügung, mit dem aber jeweils nur eine Person gleichzeitig fahren kann. Person j hat die Gehgeschwindigkeit g_j und erreicht auf dem Fahrrad die Geschwindigkeit f_j. Die Aufgabe ist nun, die Ankunftzeit der letzten Person zu minimieren. Dazu soll unter anderem das folgende LP verwendet werden:

$$\begin{array}{rlll}
\text{minimize} & t & & \\
\text{subject to} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j & \geq 0 & (1 \leq j \leq n) \\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j & \geq 0 & \\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j & = 20 & (1 \leq j \leq n) \\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j & \leq 20 & \\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j & \geq 0 & (1 \leq j \leq n)
\end{array}$$

a) Zeige, dass der Optimalwert des LP eine untere Schranke für die Ankunftzeit der letzten Person ist.

b) Warum ist der Optimalwert des LP nur eine untere Schranke? Konstruiere ein Beispiel, so dass der Optimalwert des LP echt kleiner als die minimale Ankunftzeit der letzten Person ist.

c) Versuche, eine optimale Lösung des Fahrrad-Problems für $n = 3$ und folgende Daten

j	1	2	3
g_j	4	4	8
f_j	24	24	32

zu finden. Zeige mit Hilfe des LP, dass Deine Lösung wirklich optimal ist.

Aufgabe 10 (4 + 2 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Erzeugendensystem* für C, falls $\text{cone}(S) = C$. Ist S minimal (bzgl. Mengeninklusion), so heißt S *Kegelbasis*.

a) Gib zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ unterschiedlicher Kardinalität an.

b) Gibt es im $\mathbb{R}^n$ Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität?

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Beweise den folgenden Satz: *Es seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $D \in \mathbb{R}^{(r,n)}$ und $d \in \mathbb{R}^r$ durch Fourier-Motzkin-Elimination der j-ten Variablen im Ungleichungssystem $Ax \leq b$ berechnet worden. Es seien ferner $I, J \subseteq M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = M$, und $E \cup F = R = \{1, 2, \ldots, r\}$ definiere eine Partition der Zeilenindexmenge von D wie folgt:*

$$E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I))),$$
$$F := R \setminus E.$$

Dann hat das System

$$A_{I\cdot}x \leq b_I \ , \quad A_{J\cdot}x < b_J$$

eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E\cdot}x \leq d_E \ , \quad D_{F\cdot}x < d_F$$

eine Lösung hat.

Aufgabe 12 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Beweise die folgenden Alternativsätze:

a) $(\exists x : Ax = c) \ \dot\vee \ (\exists y : A^T y = 0, c^T y = 1)$

b) $(\exists x : Ax \leq c, Ax \neq c)$

$\dot\vee \ \left[\exists y : (A^T y = 0, c^T y = -1, y \geq 0) \vee (A^T y = 0, c^T y \leq 0, y > 0)\right]$

c) $(\exists x : Ax > 0, Cx \geq 0, Dx = 0)$

$\dot\vee \ (\exists u, v, w : u, v \geq 0, u \neq 0, A^T u + C^T v + D^T w = 0)$

d) $(\exists x : Ax \leq 0, x \neq 0) \ \dot\vee \ (\forall c : \exists y : y^T A = c, y \geq 0)$

Dabei steht “$\dot\vee$“ für “entweder oder“.