Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

5. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 16.11.2004 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 17 $(1+1+1+1+2+2+2+2$ Punkte$)$

Zeige: Für S, $S_i \subseteq \mathbb{K}^n$, $i = 1, \ldots, k$ gilt:

a) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow S_j^o \subseteq S_i^o$

b) $S \subseteq S^{oo}$

c) $(\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i)^o = \bigcap\limits_{i=1}^{k} S_i^o$

d) $S^o = \text{cone}(S^o) = (\text{cone}(S))^o$

e) $S = \text{lin}(S) \Rightarrow S^o = S^\perp$ (Gilt die Umkehrung?)

f) Sind die Behauptungen a) – d) auch wahr, wenn man "^{o}" durch "$^\perp$" ersetzt?

g) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt $S^o = S^{ooo}$,

h) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt $S = S^o$?

Aufgabe 18 (6 Punkte)

Der n–dimensionale Würfel kann durch $2n$ Ungleichungen beschrieben werden. Möchte man ihn hingegen als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten beschreiben, so benötigt man alle 2^n Ecken. Konstruiere im Gegensatz dazu eine Familie von n–dimensionalen Polytopen, deren Darstellung als Konvexkombination endlich vieler Punkte "klein" im Vergleich zu jeder Darstellung durch Ungleichungen ist.

Aufgabe 19 $(3+3+4$ Punkte$)$

Die Größe y ist eine Funktion einer anderen Größe x. Es wird vermutet, dass y eine lineare oder eine quadratische Funktion von x ist. Für $i = 1, \ldots, n$ wurden Wertepaare $\big(x_i, y_i\big)$ beobachtet. Gib für die folgenden Aufgaben jeweils ein LP-Modell an.

a) Finde die „beste“ Gerade $y = bx + a$ zu den gegebenen Daten, so dass die Summe der Abweichungen zwischen den beobachteten Werten für y und den durch die Geradengleichung „vorhergesagten“ Werten minimal ist.

b) Finde die „beste“ Gerade, so dass die maximale Abweichung zwischen beobachteten und vorhergesagten Werten minimal ist.

c) Finde die „besten“ quadratischen Funktionen $y = cx^2 + bx + a$, so dass die Zielkriterien von a) bzw. b) minimiert werden.

Bemerkung: In der Statistik interessiert man sich im allgemeinen mehr für die Minimierung der Quadrate der Abweichungen. Es gibt aber Fälle, in denen die Minimierung des Maximums der Abweichungen akzeptabel oder gar gewünscht ist. In jedem Fall ist es mit Hilfe eines linearen Modells möglich, auch sehr große Datenmengen zu bearbeiten.

Programmieraufgabe 2

a) Überlegt Euch, wie man mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination zu einem durch Ungleichungen gegebenen Polyeder einen zulässigen Punkt bestimmen kann.

b) Entwerft mit Hilfe von a) und Aufgabe 16 vom 4. Übungsblatt einen Algorithmus, der, basierend auf Fourier-Motzkin-Elimination, zu einem gegebenen linearen Programm eine Optimallösung berechnet oder feststellt, dass es keine Optimallösung gibt.

c) Erweitert Euer Programm zur Fourier-Motzkin-Elimination wie in b) beschrieben. Testet es mit den Beispielen der ersten Programmieraufgabe, indem Ihr Euch jeweils eine Zielfunktion ausdenkt. Fügt die Koeffizienten der Zielfunktion als Zeile in die jeweilige Inputdatei ein, so dass Euer Programm sie auslesen kann.

Die Programmieraufgabe ist in denselben Zweiergruppen zu bearbeiten wie auch die theoretischen Aufgaben. Die Abnahme der zweiten Programmieraufgabe erfolgt in den betreuten Rechnerzeiten am 23. und 25. November 2004. Bei der Abnahme sollte jeder, der einen Leistungsnachweis bekommen möchte, anwesend sein und sowohl den Ablauf des Programmes als auch den Quellcode erklären können.