Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

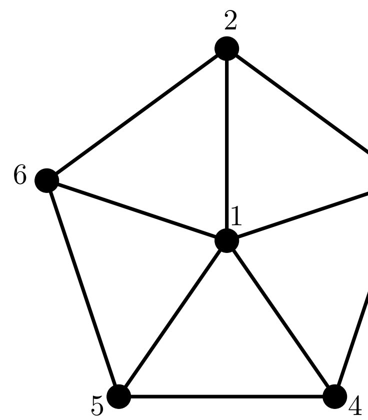
7. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 30.11.2004 (vor der Vorlesung)

Dieses Übungsblatt bildet den Abschluß der ersten Hälfte der Übungsblätter dieses Semesters. Die Punkte dieses Übungsblattes gehen nicht in die erreichbare Gesamtpunktzahl ein, sondern sollen denen, die auf den Übungsblättern 1 bis 6 die erforderliche Gesamtpunktzahl von 84,5 nicht erreicht haben, eine Möglichkeit geben, diese Gesamtpunktzahl noch zu erreichen.

Aufgabe 24 $(2+3+3+3+2+4$ Punkte$)$

Es sei $G = (V, E)$ das im folgenden dargestellte 5-Rad:



Eine *stabile Menge* in einem Graphen ist eine Teilmenge seiner Knoten, in der keine zwei Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind. Zu einer Menge von Knoten $n_1, \ldots, n_k$ ist der *Inzidenzvektor* dieser Knotenmenge als 0/1-Vektor definiert, der an genau den Stellen $n_1, \ldots, n_k$ 1-Einträge und sonst 0-Einträge hat. (Zu der Knotenmenge $\{2, 5\}$ ist der Inzidenzvektor also $(0, 1, 0, 0, 1, 0)^T$.) STAB(G) ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der stabilen Mengen vom Graphen G.

a) Bestimme alle stabilen Mengen des Graphen G.

b) Zeige, dass keine der Ungleichungen $x_i + x_j \leqslant 1$ (ij Kante von G) eine Facette von STAB(G) definiert.

c) Zeige, dass für jedes Dreieck i, j, k die Ungleichung $x_i + x_j + x_k \leqslant 1$ eine Facette von STAB(G) definiert.

d) Beweise, dass die Ungleichung $2x_1 + x_2 + ... + x_6 \leqslant 2$ eine Facette von STAB(G) definiert.

e) Zeige, dass für $i = 1, \ldots, 6$ die Ungleichung $x_i \geqslant 0$ eine Facette von STAB(G) definiert.

f) Zeige, dass die in c), d) und e) angegebenen Facetten bereits alle Facetten von STAB(G) sind.

Hinweis zu Teil f): Zeige zunächst, dass jede Ecke des Polytops, das durch die genannten Ungleichungen definiert wird, ganzzahlig ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Sei P ein Polyeder und F eine nicht-triviale Seitenfläche von P mit $F = \{x \in P | c^T x = \gamma\}$ für $c \in \mathbb{K}^n,\ \gamma \in \mathbb{K}$. Zeige:

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{K}^n | c^T x \leq \gamma\} \quad \dot{\vee} \quad P \subseteq \{x \in \mathbb{K}^n | c^T x \geq \gamma\}$$

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Sei $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder, wobei V die Menge seiner Ecken und E die Menge seiner Extremalstrahlen sei. Zeige, dass $\text{rec}(P) = \text{cone}(E)$.

Aufgabe 27 (5 Punkte)
Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 105 cm und einer Länge von L cm her. Die Kunden verlangen jedoch Rollen mit geringerer Breite (aber derselben Länge L). Es liegen folgende Aufträge vor:

100 Rollen mit Breite 25 cm
125 Rollen mit Breite 30 cm
80 Rollen mit Breite 35 cm

Zur Erledigung der Aufträge werden Standardrollen zerschnitten. Z. B. kann der Fabrikant aus einer Papierrolle mit Standardbreite zwei Rollen von je 35 cm Breite und eine Rolle von 30 cm Breite schneiden. Das ergibt einen Schnittverlust von 5cm. Ziel des Fabrikanten ist die Minimierung der Schnittverluste für die vorliegenden Aufträge. Formuliere dieses Problem als lineares Programm.