Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

8. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 7.12.2004 (vor der Vorlesung)

Dieses Übungsblatt ist das erste der zweiten Hälfte der Übungsblätter dieses Semesters.

Aufgabe 28 (8 Punkte)
Es seien $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder mit $\operatorname{rang}(A) = n$ und $F \subseteq P$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) F ist eine Kante von P.

b) F ist eine eindimensionale Seitenfläche von P.

c) F ist Seitenfläche von P, jedoch keine Ecke, und jeder Punkt $x \in F$, der keine Ecke von F ist, läßt sich entweder als Konvexkombination zweier eindeutiger Ecken von P darstellen oder als Summe einer eindeutigen Ecke und einer eindeutigen Extremalen.

d) F ist Seitenfläche von P, $|F| > 1$ und kein Punkt $x \in F$ ist echte Konvexkombination von mehr als zwei affin unabhängigen Elementen von P (d.h.: falls $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ mit x_1, x_2, $x_3 \in P$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$, dann ist $\{x_1, x_2, x_3\}$ affin abhängig).

e) $F = \operatorname{fa}(\operatorname{eq}(F))$ und $\operatorname{rang}(A_{\operatorname{eq}(F)}) = n - 1$.

f) $\dim(F) = 1$ und es gibt ein $c \in \mathbb{K}^n$, so daß F aus allen Optimallösungen des linearen Programms $\max c^T x$, $Ax \leqslant b$ besteht.

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Sei P ein Polyeder im $\mathbb{K}^n$ und $x \in P$. Zeige: x ist eine Ecke von P genau dann, wenn für alle $z \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x + z \notin P$ oder $x - z \notin P$.

Aufgabe 30 ($3 + 5$ Punkte)
Es sei I_n die Menge aller 0/1-Vektoren im $\mathbb{K}^n$. Der Hyperwürfel $H_n \subset \mathbb{K}^n$ ist die konvexe Hülle von I_n und gleichzeitig der Durchschnitt aller Halbräume $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

a) Zeige, wann zwei 0/1-Vektoren auf H_n adjazent sind.

b) Es sei y ein beliebiges Element von I_n. Gib eine vollständige äußere Beschreibung des Polytops $\operatorname{conv}(I_n \setminus \{y\})$ an und beweise, dass deine Darstellung auch wirklich eine Beschreibung dieses Polytops ist.

Aufgabe 31 (5 Punkte)

Berechne die Extremalen des Polyeders $P(A, b)$, das durch nachfolgend angegebene Matrix A und Vektor b bestimmt ist.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$