Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

10. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 4.1.2005 (vor der Vorlesung)

Wir alle wünschen Euch:
FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!

Achtung: Die zweistündige Klausur wird am 4. Februar 2005 von 14:00 bis 16:00 Uhr im Raum M/E 28 gestellt.

Aufgabe 35 $(2+2+2+3+2+2+2+2$ Punkte)

Falls nicht anders angegeben, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, das die Generalvoraussetzungen für Kapitel 9 der Vorlesung erfüllt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen, und mache Dir gegebenenfalls auch Gedanken darüber, welche *Teil*aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die zu einer Basis A_B gehörige Basislösung x ist genau dann optimal, wenn für die zugehörigen reduzierten Kosten $\overline{c} \leqslant 0$ gilt.

b) A_B sei eine optimale Basis. Erhöht man nun den Wert einer Nichtbasisvariablen über Null und passt die Werte der Basisvariablen vermöge der Gleichung $x_B = \overline{b} - \overline{A} x_N$ an, so sinkt der Zielfunktionswert.

c) Ist x eine nicht zulässige Basislösung und gilt für die zugehörigen reduzierten Kosten $\overline{c} \leqslant 0$, so ist $c^T x \geqslant c^T y$ für alle zulässigen Lösungen y.

d) Hat das LP $\max\ c^T x$ s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das LP $\max\ c^T x$ s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' beschränkt.

e) Die Anzahl positiver x_j in einer zulässigen Basislösung überschreitet nicht den Rang der Matrix A.

f) Die Anzahl der Optimallösungen sowie der zulässigen Basislösungen sind endlich.

g) Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n+1$ nichtnegativen Variablen.

h) Die beiden LPs $\max\ c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ und $\max\ -c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

Aufgabe 36 (5 Punkte)

Gegeben seien die LPs

$$\begin{array}{llll} & \max & c^T x & \\ (\text{LP}) & & Ax & \leq & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{llll} & \max & c^T x & \\ (\text{LP}_\Delta) & & Ax & \leq & b + \Delta \\ & & x & \geq & 0. \end{array}$$

x^* sei eine nichtdegenerierte optimale Basislösung von (LP) mit Wert $z^* = c^T x^*$. Zeige: Dann gibt es eine optimale Basislösung π^* des zu (LP) dualen Programms und ein $\epsilon > 0$, so dass (LP_Δ) für alle $\Delta \in \mathbb{R}^m$ mit $-\epsilon < \Delta_i < \epsilon, i = 1, \ldots, m$ eine Optimallösung mit Wert

$$z^* + \pi^{*T} \Delta$$

besitzt.

Aufgabe 37 (6 Punkte)

Benutze die Tableauversion des Simplexalgorithmus, um für das folgende Optimierungsproblem eine zulässige Startbasis zu finden und es dann zu lösen. Wähle dabei den Pivot stets so, dass zunächst der Spaltenindex kleinst möglich und in der ausgewählten Spalte dann auch der Zeilenindex kleinst möglich ist (siehe auch Bland-Regel, Skript S. 149, (10.9)).

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ & 4x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$