Universität Dortmund **WS 04/05**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V

Prof. Dr. Martin Skutella
Maren Martens, Ronald Koch, Alexia Weber

11. Übungsblatt: Lineare Optimierung

Abgabe: 11.1.2005 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 38 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Falls nicht anders erwähnt, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\max c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geqslant 0$, das die Generalvoraussetzungen für Kapitel 9 der Vorlesung erfüllt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Eine Nichtbasisvariable, die beim Simplexalgorithmus gerade in die Basis pivotisiert wurde, kann die Basis im nächsten Schritt wieder verlassen.

b) Eine Basisvariable, die beim Simplexalgorithmus gerade die Basis verlassen hat, kann im nächsten Schritt wieder in die Basis aufgenommen werden.

c) Ist x^1 eine eindeutige optimale Basislösung und x^2 eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhält man x^1 aus x^2 durch Austausch einer Basisvariablen.

d) Ist $A = A^T$, so ist jede zulässige Lösung des LP $\max c^T x$ s. t. $Ax = c$ optimal.

e) Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP nach oben beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

f) Ist eine unbeschränkte Variable x_j durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich null.

Aufgabe 39 (8 Punkte)

Um eine zulässige Startbasis für das LP

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & \text{b} \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{LP}$$

zu erhalten (b ist nicht notwendig ≥ 0), betrachten wir alternativ zur Vorlesung das LP

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & z & & & & \\ \text{s.t.} & Ax & - & bz & \leq & 0 \\ & & & z & \leq & 1 \\ & & & x, z & \geq & 0. \end{array} \tag{LP'}$$

(LP') wird mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Wie kann man aus einer optimalen Basis von (LP') eine zulässige Basis für (LP) machen oder entscheiden, dass (LP) unzulässig ist?

Gib ein Verfahren an, begründe seine Korrektheit und wende es auf die beiden folgenden LPs an.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Löse das folgende Lineare Programm mit dem revidierten Simplexalgorithmus (Phase I und II).

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & - & x_5 & + & 5x_6 & & \\ & 6x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 4 \\ & 2x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & & & = & 3 \\ & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, & x_4, x_5, x_6 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Programmieraufgabe 3

Implementiert den revidierten Simplexalgorithmus für Lineare Programme der Form $\max c^T x$, s. t. $Ax \leq b$, $x \geqslant 0$. Euer Programm soll in der Lage sein, sowohl die Pivotregel „Steilster Anstieg" als auch Blands Regel zu verwenden.

Gebt in jeder Iteration die Pivotspalte und -zeile sowie den aktuellen Zielfunktionswert aus. Am Ende ist zusätzlich eine Optimallösung auszugeben.

Testet Euer Programm anhand der Beispiele, die auf unserer WWW–Seite gegeben sind.

Die Programmieraufgabe ist in denselben Zweiergruppen zu bearbeiten wie auch die theoretischen Aufgaben. Die Abnahme der dritten Programmieraufgabe erfolgt in den betreuten Rechnerzeiten am 18. und am 20. Januar 2005. Bei der Abnahme sollte jeder, der einen Leistungsnachweis bekommen möchte, anwesend sein und sowohl den Ablauf des Programmes als auch den Quellcode erklären können.