Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 19.10.2004

Symbolisches Rechnen

2. Übung

Aufgabe 4 Sei a eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ und b eine Nullstelle des Polynoms $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Vereinfachen Sie mit diesen Informationen den folgenden Ausdruck:

$$g_0 := 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 - 3a + 2b^3a - 6b^2a + 4ba - 3 - b^2 + 3b.$$

Weitere Ausdrücke in a und b, die mit den obigen Informationen (und einem Computeralgebraprogramm) vereinfacht werden sollen, finden sich auf der Rückseite, bzw. in der Mapledatei *A04.mws*, die von unserer Internetseite heruntergeladen werden kann. Zur Erinnerung:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviii/veranstaltungen/symrech0405/

Aufgabe 5

(i) Seien $a, b, c, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

  (a) $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a - nb, b)$. (Was gilt insbesondere im Fall $a - nb = 0$?)

  (b) Gilt $\mathrm{ggT}(b, c) = 1$, so folgt $\mathrm{ggT}(a, bc) = \mathrm{ggT}(a, b)\mathrm{ggT}(a, c)$.

(ii) Seien $s, t \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Falls $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $sa + tb = 1$, so folgt $\mathrm{ggT}(s, t) = 1$.

Aufgabe 6 Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}] = \{a + b\sqrt{\alpha} | a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, versehen mit der üblichen Addition und mit der Multiplikation

$$(a_1 + b_1\sqrt{\alpha})(a_2 + b_2\sqrt{\alpha}) = a_1a_2 + \alpha b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{\alpha},$$

ferner sei $d(a + b\sqrt{\alpha}) := |a^2 - \alpha b^2|$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{\alpha}]$ gilt $d(z_1z_2) = d(z_1)d(z_2)$.

(ii) Bestimmen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ mit dem so definierten d ein euklidischer Ring ist.
Hinweis: Um die euklidische Division sinnvoll definieren zu können, betrachten Sie zunächst $z_1z_2^{-1}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 7

(i) Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[x]$ die Polynomdivisionen mit Rest von f_i durch f_{i+1}, $i = 1, 2, 3$, mit $f_1 = x^2 - 2x + 1$, $f_2 = x^2 - 1$, $f_3 = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ und $f_4 = f_1$.

(ii) Gegeben seien nun die Polynome $f = x^2y + xy^2$, $f_1 = x^2 - 1$ und $f_2 = xy + 1$ in $\mathbb{Q}[x, y]$. Dies ist kein euklidischer Ring! Versuchen Sie dennoch, eine Polynomdivision durchzuführen. Teilen Sie f zuerst durch f_1 und den Rest anschließend durch f_2. Was ändert sich, wenn Sie mit f_2 beginnen?

Abgabe: Dienstag, den 26.10.2004 bis 16.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.

Nachtrag zu Aufgabe 4 Die Datei *A04.mws* enthält neben g_0 folgende zu vereinfachende Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
g_1 &:= a^6b^2 - 3a^6b + 2a^6 - 4a^5b^2 + 12a^5b - 6a^5 - 2a^3b^2 + 6ba^3 - 4a^3 + 4a^4b^2 - 12a^4b + \\
&\quad +4a^4 + 4a^2b^2 - 12ba^2 + 6a^2 - 2b^2 + 6b + 1 \\
g_2 &:= 3a^{12} - 24a^{11} + 72a^{10} - 112a^9 + 12ba^9 - 72ba^8 + 144a^8 - 192a^7 + 144ba^7 + 18b^2a^6 \\
&\quad -144ba^6 + 155a^6 - 72b^2a^5 + 192ba^5 - 108a^5 + 72b^2a^4 + 108a^4 - 192ba^4 + 14b^3a^3 - 21a^3 \\
&\quad +58ba^3 - 54b^2a^3 - 116ba^2 + 42a^2 + 108b^2a^2 - 28b^3a^2 - 24b^3 + 36b^2 + 5b^4 - 22b + 4 \\
f_0 &:= a^2 + 2b - 3a + 1 \\
f_i &:= f_{i-1}^2 + 1,\ i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$