Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 26.10.2004

Symbolisches Rechnen

3. Übung

Aufgabe 8 Berechnen Sie für folgende f und g jeweils $\mathrm{ggT}(f, g)$, die ausgekürzte Form und die Kettenbruchentwicklung von $\frac{f}{g}$.

(i) $f = 1001$ und $g = 702$,

(ii) $f = x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 20x^2 + 17x + 21$ und $g = x^4 - 11x^2 + x + 15$.

Aufgabe 9

(i) Seien

$$a = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_N} \quad \text{und} \quad b = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \ldots + \frac{1|}{|b_M}$$

zwei endliche Kettenbrüche mit $a_N > 1$ und $b_M > 1$.
Zeigen Sie, dass aus $a = b$ folgt: $N = M$ und $a_i = b_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, N\}$.

(ii) Ist $a = b$ auch möglich, falls $a_N = 1$ und $b_M > 1$ gilt?

Aufgabe 10

(i) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $x = \frac{3+\sqrt{37}}{4}$.

(ii) Berechnen Sie die ersten fünf Näherungsbrüche und geben Sie jeweils eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 11 Die Fibonacci-Zahlen F_n sind definiert durch $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n = 0, 1, \ldots$.

(i) Zeigen Sie, dass $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ für $n \geq 0$ gilt.

(ii) Ab welchem n gilt $F_n \geq K_i$ mit $K_1 = 10^3$, $K_2 = 10^6$ bzw. $K_3 = 10^9$?

(iii) Wandeln Sie den unendlichen Kettenbruch $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$ in eine reelle Zahl (in einer herkömmlichen Darstellung) um. Wie lassen sich die Näherungsbrüche interpretieren?

Abgabe: Donnerstag, den 4.11.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.

Die nächste Übung findet am Freitag, 29.10., von 8.30 bis 10 Uhr in Raum 511 statt!