Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 16.11.2004

Symbolisches Rechnen

6. Übung

Aufgabe 20 Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}[x, y]$ folgende Gleichungen gelten:

(i) $\langle\, 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \,\rangle = \langle\, x^2 - 4, y^2 - 1 \,\rangle$,

(ii) $\langle\, x + xy, y + xy, x^2, y^2 \,\rangle = \langle\, x, y \,\rangle$,

(iii) $\langle\, x^3 - 1, y - x^2 + 1 \,\rangle = \langle\, y^2 - x + 2y + 1, xy + x - 1, x^2 - y - 1 \,\rangle$.

Aufgabe 21

(i) Sei $I = \{f \in \mathbb{Q}[x, y] \mid f(0, 0) = f(1, 1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist und geben Sie eine Basis an.

(ii) Sei $J = \langle\, x^2, xy, y^2 \,\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$.

  (a) Zeigen Sie: $J = \{f \in \mathbb{Q}[x, y] \mid f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0\}$.

  (b) Betrachten Sie J als Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x, y]$ und geben Sie eine $\mathbb{Q}-$Vektorraumbasis für J an.

  (c) Geben Sie eine Vektorraumbasis für $\mathbb{Q}[x, y]/J$ an.

Aufgabe 22 Sei $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$.

(i) Wieviele Elemente hat K?

(ii) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

(iii) Bestimmen Sie das inverse Element von $[x + x^2]$.

Aufgabe 23 Zeigen Sie:

(i) Der Kern eines Ringhomomorphismus $\phi : R \to \tilde{R}$ ist ein Ideal in R.

(ii) Zu jedem Ideal $I \subseteq R$ gibt es einen Ring $\tilde{R}$ und einen Ringhomomorphismus $\phi : R \to \tilde{R}$ mit $\ker(\phi) = I$.

Abgabe: Donnerstag, den 25.11.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.