Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 23.11.2004

Symbolisches Rechnen

7. Übung

Aufgabe 24 Zeigen Sie, dass folgende Ordnungen zulässige Termordnungen auf $T = [x_1, \ldots, x_n]$ definieren. Dabei ist $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ etc.

(i) Die **graduiert revers lexikographische Termordnung** $<_{\text{Grevlex}}$:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} <_{\text{Grevlex}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} \deg(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}) < \deg(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}), & \text{oder} & \\ \deg(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}) = \deg(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}) & \text{und} & \alpha_n = \beta_n, \ldots, \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \\ & & \alpha_i > \beta_i \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{array}$$

(ii) Die Eliminationsordnung $<_{\text{elim(k)}}$, die mithilfe der zwei gegebenen zulässigen Termordnungen $<_1$ auf $T_1 = [x_1, \ldots, x_k]$ und $<_2$ auf $T_2 = [x_{k+1}, \ldots, x_n]$ definiert ist durch

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} <_{\text{elim(k)}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} <_1 x_1^{\beta_1} \cdots x_k^{\beta_k}, & \text{oder} & \\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} = x_1^{\beta_1} \cdots x_k^{\beta_k} & \text{und} & x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} <_2 x_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots x_n^{\beta_n}. \end{array}$$

Aufgabe 25 Gegeben seien $f = xz^3 + 2x^3 + y^2z^2$, $g = y^3 + x^2 - y^2z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. Bestimmen Sie das Leitmonom von f, g, $f + g$ und $f \cdot g$ bezüglich

(i) der lexikographischen Termordnung $<_{\text{lex}}$,

(ii) der graduiert lexikographischen Termordnung $<_{Glex}$,

(iii) der graduiert revers lexikographischen Termordnung $<_{Grevlex}$.

Dabei soll für alle drei Termordnungen $z < y < x$ gelten.
Für welche Termordnungen können Sie bereits feststellen, dass $\{f, g\}$ keine Gröbnerbasis (von $\langle f, g \rangle$) ist?

Aufgabe 26 Bestimmen Sie Gröbnerbasen der folgenden Ideale in $\mathbb{Z}[x, y]$.

(i) $\mathfrak{a} = \langle 6x^3, 12xy^3, 8x^2y^2, 3x^4y \rangle$,

(ii) $\mathfrak{b} = \langle 8x, 6y^2 - 3, xy^3 \rangle$.

Aufgabe 27 Sei G eine Gröbnerbasis des Ideals $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ bzgl. der lexikographischen Termordnung mit $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Zeigen Sie, dass für jedes $0 \leq \ell \leq n$ die Menge

$$G_\ell = G \cap K[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$$

eine Gröbnerbasis ist von $I_\ell = I \cap K[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$.

Abgabe: Donnerstag, den 2.12.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.