Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 30.11.2004

Symbolisches Rechnen

8. Übung

Aufgabe 28 Betrachtet werden soll der euklidische Ring $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}$ Körper. Beschreiben Sie alle zulässigen Termordnungen und charakterisieren Sie Gröbnerbasen bzw. reduzierte Gröbnerbasen.
Beschreiben Sie ferner, wie S-Polynome bzw. Reduktionen modulo einer Menge $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ aussehen.

Aufgabe 29 Sei $R[x]$ der Polynomring über dem euklidischen Ring $R = \mathbb{Q}[y]$ und

$$\begin{aligned} f_1 &= y(4y^4+1)(y^4-1) \\ f_2 &= y(4y^4+1)x \\ f_3 &= 5yx^2 + 4y^3(y^4-1) \\ f_4 &= 5x^4 + (y^4-1)(24y^4+5). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\{f_1, \dots, f_j\}$ eine starke Gröbnerbasis ist für $j = 1, 2, 3, 4$ und bestimmen Sie jeweils die zugehörige reduzierte schwache Gröbnerbasis.

Aufgabe 30 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{lc}(f_i) = 1$ und $\mathrm{lt}(f_i)$, $\mathrm{lt}(f_j)$ teilerfremd für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$. Das **Reduktum** eines Polynoms f ist definiert durch $\mathrm{red}(f) = f - \mathrm{lm}(f)$. Zeigen Sie:

(i) $S(f_i, f_j) = \mathrm{red}(f_i) \cdot f_j - \mathrm{red}(f_j) \cdot f_i$ für alle $1 \leq i < j \leq m$.

(ii) Es existieren $s \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{K}^\star$, $t_k \in T$, $h_k \in F$, so dass $S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{s} c_k t_k h_k$ mit $t_s \cdot \mathrm{lt}(h_s) <_T t_{s-1} \cdot \mathrm{lt}(h_{s-1}) <_T \dots <_T t_1 \cdot \mathrm{lt}(h_1)$.

(iii) F ist eine Gröbnerbasis.

Aufgabe 31 Seien $f_1 = x^2 - 3xy + 9y^2 - 2$, $f_2 = 3xy^2 - 2y$, $f_3 = xy - 3y^2$ und $f_4 = 9y^3 - 2x^2 - 2y + 4$.

(i) Zeigen Sie, dass $\{f_1, \dots, f_4\}$ eine Gröbnerbasis des Ideals $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_4 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung (mit $x > y$) ist.

(ii) Bestimmen Sie eine reduzierte Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung.

Abgabe: Donnerstag, den 9.12.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.