Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 4.1.2005

Symbolisches Rechnen

11. Übung

Aufgabe 39 Skizzieren Sie die Varietäten der folgenden Ideale:

(i) $\mathcal{I}_1 = \langle x^2 + y^2 - 1, x \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$,

(ii) $\mathcal{I}_2 = \langle (x^2 + y^2 - 1)x \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$,

(iii) $\mathcal{I}_3 = \langle x^3 - x^2 + y^2 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$,

(iv) $\mathcal{I}_4 = \langle x^3 + x^2 + y^2 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$,

(v) $\mathcal{I}_5 = \langle z^2 - x^2 - y^2, z - 1 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$,

(vi) $\mathcal{I}_6 = \langle z^2 - x^2 - y^2, x \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$,

(vii) $\mathcal{I}_7 = \langle z^2 - x^2 - y^2 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$.

Aufgabe 40 Das Ideal $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ wird erzeugt von $f_1 = x^2y + z$, $f_2 = xz + y$ und $f_3 = y^2z - z^2$.

(i) Berechnen Sie eine lexikographische Gröbnerbasis von $\mathcal{I}$ (mit $x > y > z$).

(ii) Bestimmen Sie die Varietät $V(\mathcal{I}) \subset \mathbb{C}^3$.

(iii) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ mit $f^2 \in \mathcal{I}$ aber $f \notin \mathcal{I}$.

Aufgabe 41 Die reduzierte Gröbnerbasis des nulldimensionalen Ideals $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[x, y]$ ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$) bezüglich der lexikographischen Termordnung mit $y > x$ sei $\{f_0, \ldots, f_k\}$. Die Leitterme sollen aufsteigend sortiert sein, d.h $\mathrm{lt}(f_0) < \mathrm{lt}(f_1) < \cdots < \mathrm{lt}(f_k)$. Es sei $f_i = g_i \cdot y^{d_i} + h_i$ mit $g_i \in \mathbb{K}[x]$ und $\deg(h_i, y) < d_i$. Zeigen Sie:

(i) $d_0 < d_1 < \cdots < d_k$ und $d_0 = 0$ (d.h. $f_0 \in \mathbb{K}[x]$).

(ii) $g_{i+1} | g_i$ für $i = 0, 1, \ldots, k-1$.
Hinweis: Gibt es ein Polynom der Form $\mathrm{ggT}(g_i, g_{i+1}) \cdot y^{d_{i+1}} + \tilde{h}$ in $\mathcal{I}$?

(iii) $g_i | f_i$ für $i = 0, 1, \ldots, k$ und $g_k = 1$.
Hinweis: Untersuchen Sie das Polynom $\frac{g_{i-1}}{g_i} f_i - y^{d_i - d_{i-1}} f_{i-1}$ und führen Sie einen Induktionsbeweis.

Abgabe: Donnerstag, den 13.1.2005 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.