Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 11.1.2005

Symbolisches Rechnen

12. Übung

Aufgabe 42 Berechnen Sie mit Hilfe der Hilbertfunktion die Dimension der affinen Varietäten, die durch die folgenden Ideale definiert sind.

(i) $\mathfrak{a}_1 = \langle\, xz, xy - 1 \,\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$,

(ii) $\mathfrak{a}_2 = \langle\, zw - y^2, xy - z^3 \,\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z, w]$.

Aufgabe 43 Zeigen Sie, dass für die Hilbertfunktion $\mathrm{HF}_{\mathfrak{a}}(d)$ und Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ gilt:

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \;\Rightarrow\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{a}}(d) \;\geq\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{b}}(d) \;\; \forall d$,

(ii) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b},\ \mathrm{HF}_{\mathfrak{a}}(d) \;=\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{b}}(d) \;\; \forall d \;\Rightarrow\; \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

(iii) $\mathrm{HF}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(d) \;=\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{a}}(d) \;+\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{b}}(d) \;-\; \mathrm{HF}_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(d) \;\; \forall d$,

(iv) f sei ein Polynom vom Grad $\tau \Rightarrow \mathrm{HF}_{\langle f \rangle}(d) \;=\; \binom{d+n}{n} \;-\; \binom{d+n-\tau}{n} \quad \forall d \geq \tau$.

Aufgabe 44 Die Polynome

$$
\begin{aligned}
f_1 &= y^2 - x - 4y + 4 \\
f_2 &= xy + y - 2 \\
f_3 &= x^2 - 3x - 2y + 4
\end{aligned}
$$

bilden einen Gröbnerbasis des Ideals $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[x, y]$ bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung mit $x > y$.
Berechnen Sie Polynome $g_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{C}[x]$, $g_2 \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{C}[y]$ und die reduzierte Gröbnerbasis von $\sqrt{\mathfrak{a}}$.

Aufgabe 45 Die Polynome

$$
\begin{aligned}
f_1 &= z^4 - 3z^3 - 4yz + 2z^2 - y + 2z - 2 \\
f_2 &= yz^2 + 2yz - 2z^2 + 1 \\
f_3 &= y^2 - 2yz + z^2 - z \\
f_4 &= x + y - z
\end{aligned}
$$

bilden eine Gröbnerbasis des Ideals $\mathfrak{a} = \langle\, f_1, f_2, f_3, f_4 \,\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ bezüglich der graduiert revers lexikographischen Ordnung mit $x > y > z$.
Berechnen Sie mit dem FGLM-Algorithmus eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$ bzgl. $<_{\mathrm{lex}}$ mit $z > y > x$.

Abgabe: Donnerstag, den 20.1.2005 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.