Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. C. Scholz

Dortmund, 18.1.2005

Symbolisches Rechnen

13. Übung

Aufgabe 46 Die Polynome

$$\begin{aligned} f_1 &= xy - y^2 + 2x - y + 2, \\ f_2 &= x^2 - y^2 + 3x - y + 2, \\ f_3 &= y^3 - 3y^2 + 8x - 6y + 8 \end{aligned}$$

bilden eine Gröbnerbasis des Ideals $\mathcal{I} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung mit $x > y$.

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen A_x^T und A_y^T.

(ii) Bestimmen Sie die Varietät von $\mathcal{I}$, indem Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A_y^T bestimmen.

Aufgabe 47 Seien $M_1, \dots, M_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ kommutierende Matrizen, d.h. $M_i M_j = M_j M_i$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie:

(i) Je zwei Matrizen A_1, A_2 aus

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{i_1=0}^{r} \sum_{i_2=0}^{r} \cdots \sum_{i_n=0}^{r} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} M_1^{i_1} M_2^{i_2} \cdots M_n^{i_n} \mid r \in \mathbb{N}, \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \mathbb{C} \right\}$$

kommutieren.

(ii) $\mathfrak{a} = \{p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid p(M_1, \dots, M_n) = 0\}$ ist ein Ideal.

(iii) $\mathfrak{a}$ ist nulldimensional. Verwenden Sie hierzu den Satz von Cayley-Hamilton.

Aufgabe 48 Die Punkte $y_1 = (1,1)$, $y_2 = (-1,1)$, $y_3 = (1,-1)$ und $y_4 = (-1,-1)$ definieren das Verschwindungsideal $\mathcal{I} = I(\{y_1, \dots, y_4\})$.

(i) Seien $\mathcal{N}_1 = \{1, x, y, x^2\}$ und $\mathcal{N}_2 = \{1, x, y, xy\}$. Welche dieser Mengen eignet sich zur Interpolation in $y_1, \dots, y_4$?

(ii) Berechnen Sie die Gröbnerbasis von $\mathcal{I}$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung, indem Sie Terme $t \in T \setminus \mathcal{N}_i$ (mit dem passenden $\mathcal{N}_i$ aus (i)) in $y_1, \dots, y_4$ interpolieren.

Aufgabe 49 Das Ideal $\mathcal{I} = I(V)$ sei das Verschwindungsideal zur Nullstellenmenge $V = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,0,2), (0,1,0)\} \subset \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie mit dem Buchberger-Möller-Algorithmus eine graduiert lexikographische Gröbnerbasis von $\mathcal{I}$.

Abgabe: Donnerstag, den 27.1.2005 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.