Algebra I
Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Sei G eine multiplikative Gruppe mit einer geraden Anzahl von Elementen. Zeigen Sie: Es gibt ein Element $1 \neq g \in G$, das zu sich selbst invers ist. (Mit anderen Worten, es gibt mindestens zwei selbstinverse Elemente. Kann man noch etwas mehr über die Anzahl der selbstinversen Elemente sagen?)

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge im affinen Raum. Eine **Symmetrie** von M ist eine orthogonale Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $f(M) = M$.

Aufgabe 2:

a) Beschreiben Sie die Menge D_3 aller Symmetrien des regelmäßigen Dreiecks mit den Ecken $(1,0)$, $(-1/2\sqrt{3}/2)$ und $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ durch Angabe orthogonaler Matrizen. Geben Sie die Verknüpfungstafel an.

b) Nennen Sie die Ecken 1, 2 und 3. Beschreiben Sie die Symmetrien aus Aufgabenteil a) durch Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Geben Sie die Verknüpfungstafel an.

Zusatzfrage: Warum bestimmen die Bilder der Ecken die Abbildung?

Aufgabe 3: Beschreiben Sie die Symmetrien eines regelmäßigen Sechsecks im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie für jede Symmetrie f die kleinste natürliche Zahl n, so dass $f^n = id$.

Definition. Eine Menge mit Verknüpfung $(M, \cdot)$ heißt *Quasi-Gruppe*, wenn für jedes $a \in M$ sowohl die Linkstranslation $L_a\colon M \to M, x \mapsto a \cdot x$ als auch die Rechtstranslation $R_a\colon M \to M, x \mapsto x \cdot a$ bijektiv sind. Eine Quasi-Gruppe heißt *Loop*, wenn sie ein neutrales Element besitzt.

Aufgabe 4: Geben Sie möglichst kleine Verknüpfungstafeln für Beispiele der folgenden algebraischen Strukturen an:

a) eine Halbgruppe, die weder Monoid noch Quasi-Gruppe ist;

b) eine Quasi-Gruppe, die keine Loop ist;

c) ein Monoid, das weder Gruppe noch Quasi-Gruppe ist;

d) eine Loop, die keine Gruppe ist.